最適制御の３００年：最速降下から最大値原理まで

ヘクター J. サスマン とヤン C. ウィレムス

1. はじめに

最適制御は１６９７年に誕生した．３００年前のことである．オランダの北に位置するグロニンゲンという大学街で１６９５年から１７０５年までその地の大学教授であった，ヨハン・ベルヌーイが，最速降下問題の解法を公表した時であった．その１年前から彼は他の同時代人たちにその問題を解くように挑戦状を叩き付けていたのである．私たちは，１６９６年と１６９７年の出来事の物語のいくつか — その解法がヨハン・ベルヌーイやニュートン，ライプニッツ，チルンハウス，ロピタル，ヨハンの兄のヤコブ・ベルヌーイ のような巨人たちによって提出された時のこと— についてお伝えするつもりである．また，それがじゅうぶんに成熟する私たちの世紀（２０世紀）までのこの分野の進化をスケッチするつもりである．最適制御の誕生は，あらゆる誕生のように，何も無いところから現われたわけではない．歴史的内容は手短に主なアイデアのいくつかと古典ギリシャ時代からベルヌーイの時代の曲線最小化問題に関する発見の概略をまとめるつもりである．それから，私たちは最速降下問題を説明し，現在のベルヌーイの解法を提示するつもりである．また，ベルヌーイの個性や彼の例外的な天才一家のことを扱って，短いながら非技術的ではない余興を提供するつもりである．引き続いて，私たちはオイラー-ラグランジュ方程式からラグランジュ，ワイエルシュトラスの業績，そして，大事なこととして，最適制御理論の最大値原理へ至る，最小値に対する必要条件の現代的表現に導く，入り組んだ道筋に従っていくつもりである．最後に，私たちは現代の最適制御の視点から最速降下へ戻ることにより，“ そのループを閉じる ” つもりである．

私たちの命題 —最速降下が最適制御の誕生の痕跡を記している — は，幾分議論の余地があることは否めない．そして，ある読者たち — 特に，現実というものが社会学的に構築されるという，いま流行している見方を支持している人々 — は，著者たちの職業的かつ国粋主義的な偏向の単なる反映に過ぎないと考えるかもしれない．私たちは，“ 単に ”という言葉が空振りすることだけを求めて，喜んでその責任の多くを弁護したいと思う — ちなみに，私たちは２人とも制御理論家であり，１人はグロニンゲンの大学教授をしているという記録について述べておこう— ．私たちの偏向は，もちろん私たちがどのようにこの問題に関心を持つようになったのかということを説明するだろうが，決して私たちの結論の有効性や正当性に関係しているわけではない．

Date: Hector J. Sussmann(sussmann@hamilton.rytgers.edu) は the Department of Mathemtics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903 所属．彼の研究は NSF Grant DMS95-00798 と AFOSR Grant 0923 で支援されている．彼は特にアニー・N・サスマンの注意深い校正と有用な提案に対して感謝を述べている．Jan C. Willems(J.C.Willems@math.rug.nl) は the Department of Mathemtics, University of Groningen, P. O. Box 800; 9700 AV Groningen, The Netherlands 所属．NJ 08903 所属．この記事は，１９９６年１０月１１日に神戸で開催された，第３５回決定と制御の国際学会の歴史セッションで提出されたものである．．

この論説において，私たちは，点から点への最適制御に焦点を合わせている．ここでは，目的は１点からもう１点への最小コストで動的システムの状態を遷移させることである．これは，私たちが ”集合から集合へ ”の問題を考える時に生じる遷移条件の全領域を忘れることを意味している．さらに，私たちは，例えば，最適制御理論の中心的問題であるフィードバック則の形式におけるような，最適制御装置を見いだす問題と同様に，関連する非常に重要な十分条件の問題（や ”ハミルトン-ヤコビ理論）については全く議論しないつもりである．

2. ベルヌーイの挑戦状

Figure 1. **ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli) (1667-1748)**

Acta Eruditorum の１６９６年の６月の発行物にベルヌーイは次の挑戦を述べた．

> **１つの新しい問題を解けとの全ての数学者への提案**
> もし１つの垂直面に２点 A と B が与えれている時，その動点 M の軌道 AMB を特定すること．ただし，その重さの影響の下で，その軌道に沿って A から出発して最小時間内で B に到達すること．もしこのような話題に情熱を傾ける人々がこの問題を解きたいと思うのであれば，一見そう見えるよう

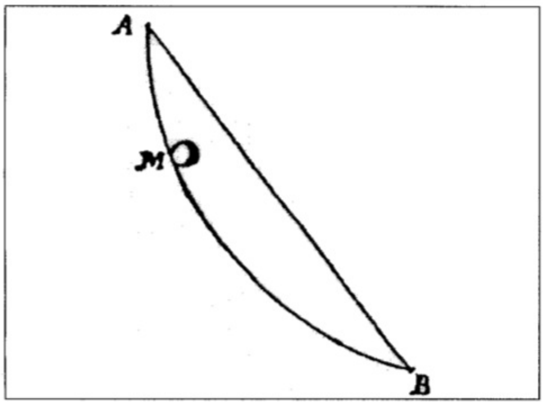

Figure 2. **最速降下問題** (*Acta Eruditorum, June 1696, p. 269*)

に，純粋に推測的で実際的応用がないかのように見えるが，そういうことはないということを知っておくのが賢明である．むしろ，ちょっと信じられないかもしれないが，力学より他の分野の科学に対して非常に役に立つということは明らかである．性急に結論を出すことを避けるために，注意しておくべきことを述べておこう．それは，直線は確かに A と B の間の最小距離の線であるのだが，それが最小時間内で移動する直線ではないということである．しかしながら，曲線 AMB は幾何学者の間で非常によく知られたものである—これはもし今年の終わりまでに他の誰も答えを見いだせないのであれば，私が暴くだろう—．

後に，ライプニッツの忠告により，ベルヌーイはその解法の締め切りを１６９７年の感謝祭まで延長した．そして１６９７年1月1日に彼は以下に再現された発表を公表した．これは地球の最も鋭敏な数学的精神の持ち主たち (図３を見よ）に宛てられている．

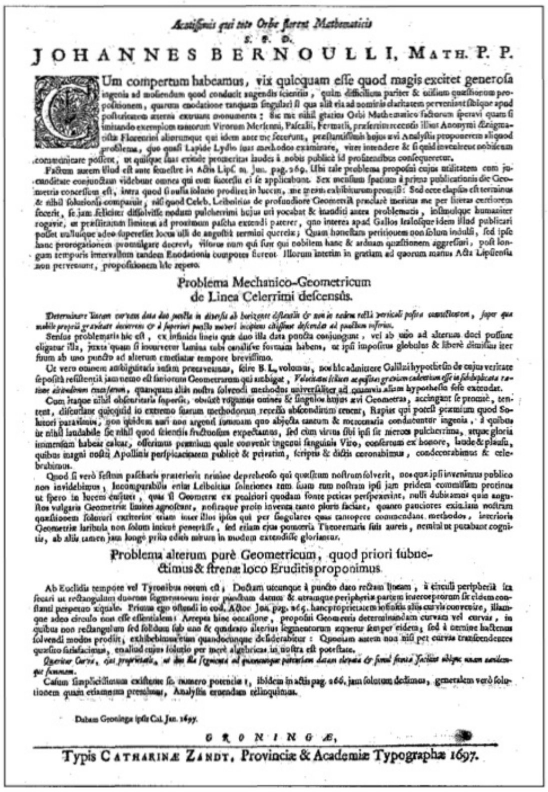
Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis
S. P. D.
JOHANNES BERNOULLI, MATH. P. P.
Um compertum habeamus, vix quicquam esse quod magis excitet generosa
Problema Mechanico-Geometricum
de Linea Celerrimi descensûs.
Problema alterum purè Geometricum, quod priori subnectimus & strenæ loco Eruditis proponimus.
GRONINGÆ,
Typis CATHARINÆ ZANDT, Provinciæ & Academiæ Typographæ 1697.

FIGURE 3. **ヨハン・ベルヌーイの公表**

3. １６９６年以前

類似の最適化問題は少なくともギリシャ時代以来ずっと研究されて来た．あらゆるもののうち最も古いものは，２点をつなぐ最小経路を決定する問題である．この解は — 非常に太古の時代からずっとよく知られていたに違いないが —，まっすぐな線分である．次にやってきたものは，等周問題，これはまたディドーの問題として知られていたが，カルタゴ (*c.* 850 B.C.) の形成についての「アエネイス」において，ヴェルギリウス (70–19 B. C.) によって言い伝えられた神話物語から霊感を与えられたものである：その問いとは,「最大の面積を包む与えられた長さを持つ平面曲線を見いだすことである.」その答えは，これが私たち現代人の厳密さに適う方式で証明されるようになるには１９世紀まで時間を要したのだけれども，ギリシャ人によって円であると知られていたのである．

アレクサンドリア[1]のヘーロー（あるいは，ヘロン）は，彼の反射光学において，ある物体から放出された光線は鏡で反射される時，その物体から目までの経路がそのような経路の中で最短距離となるように従うということを示したのである．単一媒質でそれゆえ一定の光速

[1]厳密な日時は知られていない．約紀元前１００年頃栄えたと歴史家には信じられている．ある歴史家たちは西暦７世紀か８世紀に生きたのかもしれない ”若いヘーロー ”に彼の業績を与えている．

度を持つヘーローの問題設定においては，”最小 ”は ”最速 ”に等価である．これはもはや，光線は最速—最小時間—経路に従うという一般原理を定式化した，フェルマー (1601-1665) の業績における話をしているのではない．これは，反射についてのヘーローの観察ばかりでなく，屈折のスネルの法則をも説明したのである．我々は，フェルマーの原理が最速降下問題のベルヌーイの解法に中心的役割を果たすことを見て行くつもりである．

物理学の最前線でこのすべてが起こっていた頃，曲線最適化問題の純粋数学的局面を理解する上である発展がなされていた．特に，ニュートンが１６８５年に最小抵抗を持つ物体の形の決定を研究していたのである．これは，真の ”変分計算 ”問題であった．しかし，これは，あまり多くの関心を惹かず，そして興味深い関連業績も生むことなく，孤立した業績の１つに留まったのである．

4. １６９６－１６９７：重大な分岐点

１６９６年と１６９７年の出来事は明らかなる転換点であった．ベルヌーイの１６９６年の彼の同僚たちへの挑戦状はその時代の最良の数学的精神を持つ者たちによって受け止められた．６人の数学者が最速降下問題への解法を提出した．しかし，単なる６人ではなかった．ヨハン自身による解法に加えて，その問題を「すばらしい」と呼び，１６９６年6月１６日付けのヨハンに宛てた手紙の中で解いた，ライプニッツによるものが１つ；もう一つはヨハンの年上の兄であるヤコブによるもの；１つはチルンハウスによるもの；１つはロピタルによるもの；最後はニュートンによるものであった．ニュートンによる解法は，１６９７年２月２４日に *the Royal Society* に提出され，証明無しで匿名で *the Philosophical Transactions* に公表された．しかしながら，著者の同一性はベルヌーイには明らかであった．というのも，その著者は,「ライオンはその爪で分かる (*ex ungue leonem*)」と付記していたからである．ヨハンの解法は，１６９７年５月の *Acta Eruditorum* に公表された．これは，雑誌記事のちょうど３００年前のことである．そして同じ雑誌は，ヤコブの解法を含み，ニュートンの匿名の解法を再掲し，ベルヌーイの解法と類似なので彼自身の解法を複写するつもりはないという，ライプニッツの短い注釈といっしょにチルンハウスとロピタルの貢献も掲載された．ライプニッツはまたこうも注釈を付けた：彼自身の意見では，他の誰がこの問題を解けるのだろうかと：ロピタル，ホイヘンスだろうか，もし彼が生きていればだが．ハッディだろうか？もし彼が数学を止めていなかったらの話だが．[2] ニュートンだろうか？もし彼が問題を起こさなければの話だが)

ベルヌーイの解法は，仲間に挑戦状を叩き付けておいて，自分でその問題の正解を見つけたという，彼の個性の卓越性からも想像できるように，非常に美しいものであった．さらには，この業績は，類似の問題に関する集中的な一期間の活動に導かれたものであった．その起源は１６９６－１６９７の出来事に直接にたどることができるが，多くの場合，特にベルヌーイという人物の知的な面と個人的接触の見知の両方にたどり着くのである．例えば，オイラーはベルヌーイのバーゼルにおける学生の１人であった．ラグランジュはオイラーの業績を読んで変分問題に興味を持つようになった．この研究から，結局はオイラーやラグランジュの業績に一般的な技術が現れるようになったのである．そんなわけで，数学の歴史の中で，何か重要なことが１６９６－１６９７年の内に起こったことには疑いの余地がない．例えば，[9] の３９２ページにストルイクは，１６９７年５月の *Acta Eruditorum* に公表された記事について，”これらの論文が変分計算という新しい分野の歴史を開いた ”と言っている．

[2]ハッディはアムステルダムの市長になった．ホイヘンスは１６９５年に死んだ．

5. なぜ最適制御なのか？

普通の知識では，最適制御理論はL. S. ポントリャーギンと彼の学派 ([8] を参照) による，”ポントリャーギンの最大値原理 ”の業績として約４０年前に旧ソ連で誕生したことになっている．ある数学者たちは，この新理論は古典的な変分解析に，特に不等式制約条件の合併を含めたというような，ちょっとしたことを加えただけだと信じている．[6] における，L. マーカスの記事では，１９５８年の国際数学者会議でのソビエトグループによる最大値原理の公表に対する冷たい反応を書いている．加えて，数学とは無関係の他の側面がその否定的反応に貢献したようである．これらの中で２つの理由が明確に浮き上がる：まず第１は，ポントリャーギンの個性，特に，反ユダヤ主義．そして第２のものは，その結果が当初から軍事的応用目的があるように見えたという印象．

私たちは，最適制御は変分計算より非常に豊かなもので広いものであると信じている．そして，これから説明して行くように，変分計算とは根本的な点で全く違っているのである．変分計算は，主に次のような ”標準 ”形式の最適化問題を取り扱っている[3]：

$$
\begin{array}{l} minimize\ I = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \\ subject\ to\ q(a) = \bar{q},\ q(b) = \hat{q}. \end{array} \tag{1}
$$

あるいは，等価なことだが，次の形式をとる：

$$
\begin{array}{l} minimize\ I = \int_a^b L(q(t), u(t), t)dt, \\ subject\ to\ q(a) = \bar{q},\ q(b) = \hat{q}, \\ \dot{q}(t) = u(t)\ for\ a \le t \le b. \end{array} \tag{2}
$$

これらの問題の異なる特徴は，(1) の最小化が，”すべて ”の曲線の空間で行われるが，考慮している曲線の集合のレベルでは何も起こらないということである．そして，その問題の自明でない特徴はラグランジアン L のために生じるのである．

それとは反対に，最適制御の問題は，ある動的制約条件によってそれ自身が決定される，曲線集合 C にわたる最小化を必然的に含んでいることである．例えば，C は，”制御関数 ” $t \mapsto u(t)$ のある選択に対して，微分方程式

$$
\dot{q}(t) = f(q(t), u(t), t) \tag{3}
$$

を満足する，全ての曲線 $t \mapsto q(t)$ の集合であるにちがいない．さらにもっと正確に言えば，C の１つの要素はそれを生成する制御 u を一意に決定しないということが起こりうるので，私たちは軌道-制御の組 $(q(\cdot), u(\cdot))$ について語って行くべきである．そんなわけで，１つの最適制御問題において，その状況に興味深い構造を与える少なくとも２つの対象，すなわち，動力学 f と最小化されるべき汎関数 I がある．特に，最適制御理論は，変分計算から正反対の極限で，”ラグランジアン“ L が $\equiv 1$ である，すなわち，完全に自明でそれゆえすべての面白い作用が動力学 f のために起こるという問題を含んでいる．(2) 式にあるような，終点の制

[3]後で，私たちは１７世紀から１９世紀のいくつかの著者たちの業績を議論するつもりである．明解さと一貫性のために，私たちは，議論の下にある著者たちの数学記法より，私たち自身のものをいつも使用するつもりである．そんなわけで，例えば，文字 L はいつも ”ラグランジアン ”を表し，状態変数は，通常—しかし必ずしもいつもというわけではないが—q と呼ばれる．そして，独立変数—この分野の昔の論文では x あるいは y としばしば呼ばれたもの—は通常 t であり，時間と考えられるべきだろう．私たちは時間に関する微分を記述するために点 $(\cdot)$ を使うつもりである—そして２，３の場合に関してプライム (’) を使い，また，長い数式を微分する時には d/dt を使う—.

約条件を満たし，そしてある制御 $t \mapsto u(t)$ に対する，(3) の解である，すべての曲線 $t \mapsto q(t)$ の間で，時間を最小にすることを望む問題—すなわち，$L \equiv 1$ を持つ (2) の積分 I—というような問題は「最小時間の問題」と呼ばれている．これらの問題では，最適制御と変分計算の差は最も明らかであり，これらが１９６０年代初期に最適制御の発展を推進した問題であったということや，時間-最適制御が今日の研究や最適制御の現代的な教科書においてきわだって代表的に扱われているということは偶然ではない．

この理論的枠組の範囲内で，私たちは最速降下問題が最適制御の誕生を記念している：「ベルヌーイの問題は，Acta Eruditorum で掲示されたように，最適制御理論において今日研究されているような類いの本当の最小時間問題である.」ベルヌーイは，その最速経路を ($\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\zeta$：最短と $\chi\rho o\nu o\zeta$： 時間というギリシャ語から）最速降下と呼んだ．さらに,「最速降下問題は，動的振る舞いを扱い，１経路の最適な選択をあからさまに求める初めての問題であった.」等周問題とニュートンの最小抵抗問題の両方においては，計算される曲線は動く物体あるいは粒子の経路であるとはまだ考えられていなかった．最終的に,「そして最も重要なことに，それに引き続く変分計算の歴史の大半は，最適性に対する必要条件の最も簡単で最も一般的な言明のための探索として最もよく理解されている．そしてその言明は最適制御理論の最大値原理によって与えられている.」

上述の理由が，私たちの観点では，１６９６年が最適制御の誕生の年と呼ぶにふさわしいという，私たちの主張を支持する，説得力のある議論である．

6. 最速降下のベルヌーイの解法

私たちは，ヨハンのベルヌーイの解法[4]を記述することで出発する．

最初に最速降下の問題を現代の数学の言葉で定式化しよう．平面の x と y 軸を y を下に向うようにとろう．$(0,0)$ と (a,b) をそれぞれ終点 A と B の座標を表すために使おう．区間 $[0,T]$ で定義され，要素 $f_1(t), f_2(t)$ を持つ，１つの経路 $f:[0,T] \to \mathbf{R}^2$ は，もし以下のような条件が満たされるなら，実現可能な軌道あるいは実現可能な経路と呼ばれる：

$$
\begin{aligned}
&(i) f(0)=(0,0), f(T)=(a,b),\ and\ f\ is\ Lipschitz\ continuous,\\
&(ii) \tfrac{1}{2}\left(\left|\dot{f}_1(t)\right|^2+\left|\dot{f}_2(t)\right|^2\right)=g f_2(t)\\
&for\ almost\ all\ t\in[0,T].
\end{aligned}
$$

ここで g は重力定数である．条件 (i) はその経路 f が A で出発し B で終わらなければならないことを述べている．条件 (ii) はエネルギー保存則を反映している：任意の瞬間で物体の運動エネルギーは高さの損失による位置エネルギーの減少に等しい.（高さ h から落ちた物体は $\sqrt{h}$ に比例する速度を持つという法則は，ガリレオによるものであったが，ベルヌーイの時代には十分によく知られていたのである.）

１つの実現可能な経路 $f^*:[0,T^*] \to \mathbf{R}^2$ は，もし $T < T^*$ である，実現可能でない経路 $f:[0,T] \to \mathbf{R}^2$ が存在する場合には,「最適」と言われる．１つの最速降下は，最適な実現可能な経路によって横切られる $\mathbf{R}^2$ 内の１曲線である．すなわち，$B=(x,y)\in\mathbf{R}^2$ の形式の $\mathbf{R}^2$

---

[4]ヤコブの解法はヨハンのものとは全く異なっていた．一見すると無器用に見えたが，長い目で見ると，変分計算，ハミルトン-ヤコビ理論，動的プログラミングの主流のアイデアにより同種のものであった．それゆえ，最適制御の発展においては歴史的重要性を持つものであると広く考えられている．しかしながら，余白がないため，ここでは議論しないつもりである．ゴールドスタイン [7] が１つの卓越した叙述を与えている．

の1部分集合 B: $(x,y)=f^*(t)$ であるように，$t\in[0,T^*]$ が存在する．ここで，$[0,T^*]\to\mathbf{R}^2$ が１つの最適実現可能な経路である．

１つの明白な事実は,「その解はいつも直線とは限らない」ということである．これはベルヌーイが正しく警告したように１つの可能性にすぎない．例えば，$b=0$ の特別な場合を考えよう．すぐに分かることは，半円上を A から B まで転がるのに有限の時間がかかるということである．というのは，A から円の底まで転がるのに有限の時間がかかり，B に登るために同じだけの時間がかかるからである．しかしながら，A から B までのまっすぐな線分は水平であるので，それに沿った運動は生じない．それゆえ，まっすぐな線分は，それに沿う運動が無限の時間を要するために，最適経路の１つにはなり得ないのである．

最速降下はサイクロイドであることが分かっている．それは，間で x 軸にあたることなく，P が A とそれから B を通過するように，x 軸上を滑ることなく回転する，１つの円内の点 P で描かれる曲線のことである．これが一意にサイクロイドを決定することを容易に知ることができる（図４を見よ）．

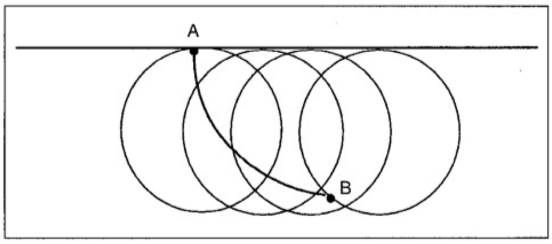

Figure 4. **最速降下のサイクロイド** (*Acta Eruditorum, May 1697*)

最速降下のベルヌーイの天才的な証明は，膨大な報告のある題材であった．しかし，この出来事は私たちの物語でも中心的な役割を果たすので，私たちは再びその証明の要点を述べるつもりである．

ベルヌーイは，自分の証明の基礎をフェルマーの最小時間の原理に置いた．もし私たちが，少しの間，運動物体を取り扱う代わりに，光線を取り扱うということを想像するなら，上の条件 (ii) は，位置の関数としての ”光速度 ”に対する公式：$c=\sqrt{2gy}$ を与えている．$2g=1$ となるように，尺度を変えよう—あるいは，もし読者がそう望むのなら，”物理の単位の選択を変えよう ”—．その時，私たちの問題は厳密に平面媒質中の光線を決定する問題—すなわち，最小-時間経路—と等価になる．そこでは，高速度 c は公式 $c=\sqrt{y}$ に従って位置の関数として連続的に変化する．

少なくとも直感的に明らかなことは，もし私たちが半平面を高さ δ の水平な帯 $S_k=\{(x,y): y_k\le y\le y_{k+1}, y_k=k\delta(k=0,1,\cdots)\}$ に区分することによって，私たちの問題を離散的なものにすることができる．そして，それぞれの帯 S_k の中では，c を定数 c_k（$c_k=\sqrt{y_k}$ と置く）と取り扱うとすると，離散化された問題に対する光線は $\delta\downarrow 0$ で最初の問題に帰着すべきであろう．離散化された問題の光線は光の屈折の法則を使って研究することができる．明らかに，その経路はそれぞれの帯の中ではまっすぐな線分になるだろう．そして為すべきことのすべては，これらの光線が２つの間の境界を交差する時に，どのように曲がるかを決めることである．その答えは，スネル，フェルマー，ホイヘンスによって発展させられた光学の法則により与えられるのである．

スネルは，もし２つの媒質が直線によって分けられていて，光線がそれらの間の境界で反射される場合，光線と境界の垂直との間の入射角のサイン関数の比が一定であるということを観察していた．続いてフェルマーはこれが正確に光が最小-時間経路を進む時にまさに起こることを示したのである．水平線によって分けられた２つの媒質の場合にこれを適用することで，次の最適化問題が導き出される．私たちが上方に置かれた P_1 とその境界の下方にある２つ目の P_2 の，２点を持つと仮定しよう．水平線より上の媒質では，光は速度 ν_1 で進み，その線の下の媒質中は速度 ν_2 で進むと仮定する．もちろん，$\nu_1=\nu_2$ の時は，この最速経路は P_1 から P_2 への直線である．これは，P_1 から P_2 へ進む最速経路が，$\nu_1\neq\nu_2$ の時には，P_1 から境界上の１点 P' への直線ともう一つの P' から P_2 への直線でできる折れ線であることを意味している．このようにして，その問題は点 P' を探す問題に帰着される．これは，しかしながら，簡単な計算問題であり，その点 P' は方程式 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}$，あるいは，等価な，$\frac{\sin\theta_1}{\nu_1}=\frac{\sin\theta_2}{\nu_2}$ により決定されるのである．

入射角を伝播速度に関係づけるこの法則はホイヘンスによるものであり，スネルの法則の内容を含んでいる．ベルヌーイは，ホイヘンスの法則を量 $\frac{\sin\theta_k}{\sqrt{y_{k+1}}}$ が一定となるだろうと結論するために使った．というのは，それぞれの帯 S_k の内部では，私たちの光線の速度は $\sqrt{y_{k+1}}$ だからである．$\delta\downarrow 0$ の極限に戻すと，私たちは，最速降下の接線と垂直軸との間の角 θ の $\sin$ は $\sqrt{y}$ に比例しなくてはならないと結論することができる．$\sin\theta=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ であるから，私たちは，$\frac{dx^2}{dx^2+dy^2}=Ky$ を見いだす．ここで，K は定数である．その時，$\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}=\frac{1}{Ky}$，すなわち，$1+y'(t)^2=\frac{C}{y}$ である．ただし，$C=\frac{1}{K}$．それゆえ，x 座標の関数として最速降

下の y 座標を表す曲線は，微分方程式

$$y'(t) = \sqrt{\frac{C - y(x)}{y(x)}} \tag{4}$$

を満足するのである．ここで C は定数．パラメーター方程式

$$x(\varphi) = x_0 + \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi), \quad y(\varphi) = \frac{C}{2}(1 - \cos\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \tag{5}$$

が (4) を満たしている．簡単に分かることは，それが，$\varphi = 0$ の時に P が $(x_0, 0)$ にあるように，水平軸上を滑ることなく回転する，半径 C の円の上を動く点 P によって生成されるサイクロイドであるということである．

私たちがここに提出した議論はベルヌーイのものである．方程式 (4) は，”これから，私は最速降下は通常のサイクロイドであると結論する ”という言明に続いて，彼の論文に現れている．（彼は実際には $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ と書いたが，彼は x を垂直座標に使い，y を水平座標に使っていた．[9] の p.394 参照.）

現代数学では，記号 $\sqrt{r}$ は普通 r の非負の平方根に対して使うが，ヨハン・ベルヌーイはこのことは気にしていなかった．彼は，明らかに，私たちが

$$y'(t) = \pm\sqrt{\frac{C - y(x)}{y(x)}} \tag{6}$$

あるいは，等価なことだが，

$$y(t)(1 + y'(t)^2) = constant. \tag{7}$$

と書くようなことが意味したかったのである．特に，その解曲線は負の傾きを持つことを許されるべきである．しかし，(6) のある $+$ 解からある $-$ 解への切り替えが許されないように，y' は連続に留まるのである．

もっと正確に (7) を書き直すとすれば，ベルヌーイによって導き出された微分方程式はまた，(5) では記述できない，疑似解を持っているのである！　実際，任意の $\bar{y} > 0$ に対して，$C = \bar{y}$ に対応する，定数関数 $y(x) = \bar{y}$ は 1 つの解である．より一般には，(5) で与えられる通常のサイクロイドをとり，— $dy/dx = 0$ となるように — それに $\varphi = \pi$ まで従い，それから，任意の時間 T の間だけ一定関数 $y(x) = C$ に従い，それから，(5) のサイクロイドに続くということもできる．実際，そういう経路は，ホイヘンスの屈折の法則と矛盾しないのである．

スネルの法則とホイヘンスの法則は，ひとたび光線が水平の場合には，なぜ光線が上や下へ曲がるのかを説明することができないということを理解することは簡単である．そういう場合に，A と B をつなぐ最速降下サイクロイドが，点 B に戻って上がる前に最初に底に達する時には，ベルヌーイの議論は確かに不完全である．一度最低点に到達したなら，なぜそれが水平に前進すべきではないのかという理由はない．ベルヌーイの議論におけるこの欠点は，歴史家たちの目に止まらなかったように見える．私たちは，最大値原理が水平運動を除外するということを後で見るだろう．

疑似解と，y' が連続であるという制約が明らかに任意であるというような，他のすべての問題は，いろんなやり方で消去できる．例えば，人は直接に疑似解が最適ではないと証明す

ることができる．あるいは，ベルヌーイの方法の代わりとして，人は，以下の (10) のオイラー-ラグランジュ方程式に基づく変分計算のやり方を使うこともできる．

最速降下問題は，もし私たちが，$[0,a]$ 上で定義された関数 $y = y(x)$ のグラフである，x, y 平面内の曲線を考えることで十分であると仮定する[5]のであれば，(1) の ”標準 ”形に持って行くことができる．その時，動的制約条件 (ii) は，—前と同じく，$2g = 1$ とすると，$dx^2 + dy^2 = ydt^2$ となる．これは，$dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}} = L(y, \dot{y})dx$ を与える．ここでは，

$$L(y,u) = y^{-1/2}(1+u^2)^{1/2} \tag{8}$$

であり，私たちは時間微分に対して t の代わりに x を使い，$\dot{y}$ を dy/dx と書いている．それゆえ，ベルヌーイの問題は，積分 $\int_a^b L(y(x), \dot{y}(x))dx$ を $y(0) = 0$ と $y(a) = b$ の下で最小化する問題になるのである．

これはオイラー-ラグランジュ方程式

$$1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0, \tag{9}$$

を与える．これは，(7) より強い．というのは，(7) は $y' + y'^3 + 2yy'y'' = 0$，すなわち，$y'(1 + y'^2 + 2yy'') = 0$ に等価だからである．この解は (9) の解プラス前に見いだされた疑似解なのである．最速降下問題に対して,「オイラー-ラグランジュの方法がベルヌーイの方法より良い結果を与える」ということを示すことから，任意の疑似解を持つことなく，オイラー-ラグランジュ方程式 (9) の解が厳密に (5) によって与えられる曲線であるということが簡単に分かる.（私たちは後のセクションで最適制御がもっと良いということを示すつもりである.）

ベルヌーイは当初，最速降下問題が新しいという間違った印象を持っていた．しかしながら，ライプニッツはもっと知っていた：１６３８年にガリレオは,「２つの科学」という彼の本に最速降下問題を定式化していた．さらに，１つの解まで提案していたのである：ガリレオは解は円だと考えていたようである．ガリレオは，現実に — 正しく — 円弧はいつも直線よりずっと良いということを示したのである — もちろん，$a = 0$ の場合は除外して．

ベルヌーイは，ガリレオが，微分計算（あるいは，彼らが「新しい方法」と呼んだもの）の秀逸性の決定的証拠として，懸垂線 (カテナリー) は放物線であり，最速降下は円であると考えたということによる２つの論点について間違いを犯したという事実を考えた．

彼は，最速降下がサイクロイドであるという彼の発見にスリルを感じた．この曲線は，ガリレオが導入したものだった．ガリレオは,「円に関係したもの」と命名したのである．ホイヘンスは，サイクロイドの驚くべき性質を発見した：サイクロイドは，自身の重量の下で落下する物体がこの曲線に従うと，どこでその物体が放たれるかに無関係な周期の振動をするようになる，唯一の曲線である．ガリレオが考えたこととは正反対に，円はこの性質を近似的に持っているだけである：振り子の振動周期は振幅の関数である．それゆえ，ホイヘンスは，この曲線を ($\tau\alpha\nu\tau o\zeta$: 等しいと $\chi\rho o\nu\zeta$：時間から) サイクロイドと呼んだ．ベルヌーイは，サイクロイドが最速降下でありなおかつ等周期性を持つと判明することになったという一致によって驚き，幾分当惑したように見える．それは，それ自身の重量で落下する物体がその曲線上を進むのに要する時間に関連する，かなり異なる２つの性質が，最終的に同じ曲線を導いたからである．ここで見たように，彼は,「２つの異なる性質を１つの曲線に付与するというような形で，自然はいつも物事を最も簡明な方法で定める」と結論したのである．

---

[5]最適制御といっしょになると，この ”仮定する ”というのは，確かな結論になる．以下の”最速降下と制御のための最終章”参照.

7. ヨハン・ベルヌーイと彼の家族

さて，私たちは，ベルヌーイの家族にまつわるいくつかの歴史的内容の概略を述べる．ベルヌーイ一家は，出身はフランダースのアントワープから来たプロテスタントの家族であった．彼らは，スペイン支配者の宗教弾圧を避けるためにアントワープに１５８３年に逃げて来た．そして，フランクフルトでしばらく過ごして，最終的にスイスのバーゼルに１７世紀の初期に住み着いた．その構成員の中には３世代に渡って８人の数学者がいた．彼らの大半はバーゼルの大学教授におさまったが，多くのものはヨーロッパの他の大学においても長い年月を過ごしたのである．ベルヌーイ家の最も有名な人は，ヤコブ (1654-1705)，私たちの話の主人公である，彼の弟のヨハン (1667-1748)，そしてヨハンの息子のダニエル (1700-1782) であった；彼の父親ヨハンがその地で大学教授をしていた時にグロニンゲンで誕生した．ヤコブ・ベルヌーイは，特に確率論で重要な貢献を行った.（ベルヌーイ分布は彼にちなんで付けられた.）ダニエルは，物理学の偉大な法則の１つである，流体力学のベルヌーイの法則の発見者である．

ベルヌーイがそれなりの年齢になった時代というのは，数学が革命を起している真っ最中であった．１６８４年にライプニッツが微分計算についての最初の論文を *Acta Eruditorum* に出版した．この論文は，*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitus moratur, & singulare pro illis calculi genus* という題名であった．彼は，たくさんの例に対して，以前に可能とされたものよりもずっと有効に最大と最小を見いだすことにより,「新しい方法」の威力を示した．ヨハンとヤコブ・ベルヌーイは，ライプニッツの方法を身につけた人々の最初であった．１６９１年にヨハンはカテナリー（懸垂線），掛かった鎖の形を決定するために微分計算を使って最初の成功を収めた．まだ２０代半ばで，ヨハンはフランス人の貴族で彼の時代の有名な数学者の１人，ド・ロピタル侯爵によって微分計算を伝授するために雇われた．彼はこの仕事に対して結構良いお金を得たのだが，彼は契約によってこの指導の期間中にヨハンが行った発見に対する功績をロピタルに与えるように制限されていたのである．ヨハンは，$\frac{0}{0}$ の極限についてのロピタルの定理の真の発見者は自分であるといつも文句を言っていた．これは，その公爵の本，*Analyse des Infiniment Petits*（無限小解析）の中で世に出た．彼の同時代人たちは，彼のこの文句を無視しがちであった．というのは，彼は彼自身の発見について他人や反対者たちに特別に親切であったというわけではなかったからである．しかしながら，１９２２年にこれらの講義の最初のノートが発見されたのである．これは，ヨハンの文句に対する正当な証拠をもたらした．

ヨハン・ベルヌーイは単純な人物ではなかった．彼はしばしば彼の同僚たちとあからさまに喧嘩した．彼の給料や健康や業績について不満を言った．１６９５年にホイヘンスの推薦で彼に提供されたグロニンゲン大学の教授職に任命されたすぐ後に，彼にその申し出を受けるように奨励したライプニッツに宛てた手紙の中で，彼の幻想が打ち砕かれたことをぶちまけたのである :「代数の使い手の１人にも出会ったことがありません．これがあなたがオランダの現状と考えたことです．反対に，”平凡な数学者” と呼ぶに値する１人の人物にさえ会ったことがありません」．　同じ手紙の中で，彼は教育に時間をとられ過ぎ,「学生が進歩すればするほど，自分はますます進歩が少なくなる」と不平をもらしている．ベルヌーイは，政治的に正しくない見方を私的な手紙においてばかりか，公共においても表明した．グロニンゲンにいる間，彼はその土地のプロテスタントの神学者や聖職者と深刻なもめ事を起したの

である．彼らは，物理科学の新発見が神の真実に疑いの目を向けるというその流儀に賛成しないという人々であった．

彼の数学仲間たちとの言い争いにおいても，彼は容赦しなかった．彼は，おそらく，微分計算の独創性や厳密性に関して，ニュートン主義者のイギリス人とライプニッツ学派の大陸の人々の間の苦い論争における最もいまいましい競争相手であった．彼は，賛成派にも反対派にも激情的な人であった：ライプニッツとオイラーは，彼の神様たちであった；彼はニュートンを積極的に嫌らっており，ひどく過小評価した．([1] の p. 135.）彼の兄ヤコブとのライバル意識はその当時の科学社会の困惑の種であった．１６９９年に彼らがパリ・アカデミーに立候補した時，彼らは論争を止めるように約束させられていたが，もちろんその約束は破られた．もっと奇妙なものは，ヨハンの自分の息子のダニエルへのライバル心であった．彼は，ダニエルが — ニュートン主義者であること — を批判し，— 流体力学の法則 — を盗作した．申し伝えられるところでは，彼はその仕事の成功に非常に嫉妬したのである．ヨハンは，彼が候補の１人であったフランス科学アカデミーの賞をダニエルがもらった時，ダニエルを家の外に投げ出した．参考文献 [9] の p.134．ダニエルは，しかしながら，彼の父親の前では忠実に尊敬の念を忘れなかったようである．しかし，彼の友達のオイラー（バーゼルにけるヨハンの学生．セントペテルブルグではダニエルの同僚）には，彼の懸念を打ち明けていた．

図５は，グロニンゲンの（大学の主たる現場）アカデミービルのステンドグラスにある写真である．ダニエル・ベルヌーイは楽しそうに父親の礼服を引っ張っている．方やヨハンは彼の最速降下を示している．

ベルヌーイの任命と最速降下の発見の３００年記念祭の機会で，グロニンゲン大学は図６の記念碑を建てた．それは芸術家がサイクロイドを生成する円といっしょに最速降下を描写したものを含んでいる．その背景には，数学部の建物が見える．そこにはこの論説の第二の著者のオフィスがある．

8. オイラー，ラグランジュ，ルジャンドル

最速降下に関する，ヨハン・ベルヌーイ，ヤコブ・ベルヌーイ，ライプニッツ，チルンハウス，ニュートンとロピタルの業績で，最適制御は１つの特別な出発に飛び立った．さて，その後の進化について，いくつかの決定的な出来事を見て行こう．

我々の話の次章はオイラー (1707-1793) とラグランジュ(1736-1813) の業績である．レオナルド・オイラーは１３歳でバーゼル大学に入学した．ベルヌーイの学生になった．ベルヌーイはオイラーに週１回の個人教授を行った．彼はバーゼルで１７３２年と１７３６年に等周問題で業績を残した．１７４４年に彼は,「最大あるいは最小の性質を示す平面曲線を見つける方法」という本を出版した．そこで，彼はオイラー方程式と呼ばれることになったものを書き下すための一般的な手順を与えた．

そしてそれからラグランジュが舞台に登場した．ゴールドスタインの言葉（[7] の p.110）にはこうある：

> １７５５年の８月１２日に，１９歳のトリノのルドヴィコ・ド・ラ・グランジュ・トーニエは，短い手紙をオイラーに書いた．その手紙には，その１つの非常に美しくかつ革命的なアイデアの数学的詳細を含んだ付録が添付されていた．彼は，どのようにオイラーの方法から，幾何学的直感の退屈さと必要性を取り除くかということ，および，いかにして全過程を非常に解析的な

FIGURE 5. **ヨハン・ベルヌーイとダニエル・ベルヌーイ**

機械あるいは道具に還元するかということをやってみせたのである．それは，オイラーの必要条件となることが判明し，さらにそれ以上であるということがほぼ自動的に分かったのである．ラグランジュのこの基本的アイデアは，変分計算における新しい時代の到来を知らせた．実際，ラグランジュの業績を見た後，オイラーは自分の方法を使うのを止め，ラグランジュの方法の信奉者となり，その主題を変分計算と名付けたのである．

変分を使っている彼の最初の論文のまとめで，オイラーはこう言っている．「この著者（オイラー）は，論争を長い間調停し，彼の望みを友人たちに打ち明けて来たけれども，いまだに最初の発見の栄誉は，解析的手法だけを使って，著者が幾何学的考察によって演繹したのと同じ解に明解に到達した，非常に洞察力に富む，トリノの数学者ラグランジュに与えられるべきであると考える．」

ラグランジュは，”オイラー-ラグランジュ方程式 ”として知られる必要条件

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{10}$$

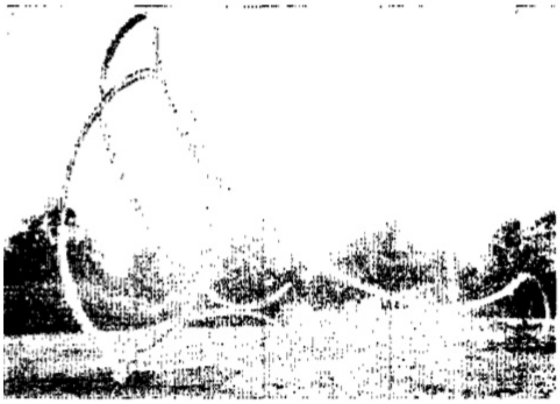

Figure 6. **最速降下の記念碑**

を導き出した.（これは彼の記法ではない．偏微分のための，記号 ∂ は１７８６年にルジャンドルによって初めて使われたのである.）

方程式 (10) は完全に意味をなす．そして，スカラー変数と同様にベクトル値変数 q に対しても必要条件である．それは１つの系：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i},\ i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

と書くことができる．あるいはまた，私たちは方程式 (10) をベクトル恒等式と見なすこともできる．その場合は，$q = (q^1, \cdots, q^n)$ は n-次元ベクトルであり，$\frac{\partial L}{\partial q}$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ は n 個組，$\left(\frac{\partial L}{\partial q^1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial q^n}\right)$，$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right)$ である．現代の数学者は，”独立変数 ”と ”軌道に沿って計算される時間の関数 ”の両方として $\dot{q}$ を使うことに問題を感じるかもしれない．そして，(10) を

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial u}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)\right] = \frac{\partial L}{\partial q}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right),\quad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

のように書く方を好むかもしれない．ここで，ラグランジアン $L(q,u,t)$ は $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上の関数である．すなわち，$q \in \mathbf{R}^n$，$u \in \mathbf{R}^n$，$t \in \mathbf{R}$．それは，(10) の左辺を計算するために，"$\dot{q}$ を独立変数として扱って"，最初に $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を計算し，それから，q と $\dot{q}$ に対して $q(t)$ と $\dot{q}(t)$ を代入し，最後に，t で微分するということを明確にしている．

オイラー-ラグランジュ系 (10) — あるいは (12) — は，停留値に対する条件，すなわち，I の１次変分がゼロに対する条件を与えた．次の自然なステップは，第２変分を見ることであった．これは，ルジャンドル (1752-1833) により行われた．彼は最小に対する付加的な必要条件を見いだした．スカラーの場合に対して証明された彼の条件は，

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,(q(t),\dot{q}(t),t) \geq 0 \left(i.e.,\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\,(q(t),\dot{q}(t),t) \geq 0 \right) \tag{13}$$

であった．適切な再解釈を行うことから，ルジャンドルの条件 (13) は，ベクトルの場合においても必要条件となる：私たちがしなければならないことのすべては，(13) をそのヘシアン行列 $\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\,(q(t),\dot{q}(t),t) \right\}_{1 \leq i,j \leq n}$ が非負の有限量であると主張していると見なすことである．

9. 最初の分かれ道：ハミルトン

この時点で，私たちはこの道筋における最初で一番決定的な分かれ道に近づいてきている．それは，W. R. ハミルトン (1805-1865) の業績を含んでいる．ある意味で，危機に瀕して，その問題は，かなり自明な，そして，オイラー-ラグランジュ系を異なる定式化で書き直しただけの問題のように見える．しかしながら，時々，定式化がとてつもない差を作り出すということがある．何が起こったのか，何が起こりえたのか，そしてそうでなかったのかを理解するために，これまで与えられて来た任意の最小に対する２つの必要条件の意味をとってみよう．私たちは,「オイラー-ラグランジュ方程式 (10)」と「ルジャンドル条件 (13)」を持つ．ルジャンドル条件は，明らかに，ある関数，すなわち，u の関数としての $L(q(t),u,t)$ の任意の最小に対する２次の必要条件である．しかし，(10) は同じ関数の任意の最小に対する１次条件の形をまったくしていない．それゆえ，この２つの条件を関係づけるための方法があるかどうかを問うてみるが自然である．はたして両方が，１つの同一の関数の最小に対する必要条件として表現されることが可能だろうか？その答えはイエスである．これがそのように行われるかを理解することは，まっすぐに最適制御理論，最大値原理や古典理論の遠大な一般化に導くのである．しかしそこへ行く前に，どのようにしてハミルトン自身だけがそこへ到達し，そしてミスを犯したのか，またワイエルシュトラスはもっと近くまで行ったが，やはりミスを犯した，ということについての物語を述べておこう．

(10) を記述する別の方法を見てみよう．曲線 $t \mapsto q(t)$ が，(10) の解であるとしよう．$\mathbf{R}$ 内の３つのベクトル変数，q,u,p と $t \in \mathbf{R}$ の関数 $H(q,u,p,t)$ を次のように定義しよう．

$$H(q,u,p,t) = \langle p,u \rangle - L(q,u,t). \tag{14}$$

それから，

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial u}\,(q(t),\dot{q}(t),t) \tag{15}$$

と定義しよう．その時，私たちの曲線 $q(t)$ に沿って $\frac{\partial H}{\partial p} = u$ であることは明らかである：

$$\frac{dq}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), \dot{q}, p(t), t). \tag{16}$$

また，$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$ であるから，$p(t)$ は (15) で定義されるので，(12) は次のことを言っている：

$$\frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), \dot{q}, p(t), t). \tag{17}$$

最終的に，$\frac{\partial H}{\partial u} = p - \frac{\partial L}{\partial u}$ だから，(15) は次のことを言っている：

$$\frac{\partial H}{du}(q(t), \dot{q}(t), p(t), t) = 0. \tag{18}$$

方程式 (16), (17), (18) のシステムは，通常もっと簡潔に以下のように記述される：

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{19}$$

これは，H が (14) のように定義されるのであれば，厳密に (10) に等価である．

私たちは，その関数 H を ”制御的ハミルトニアン ”と呼ぶつもりである．そして，(19) を「オイラー-ラグランジュ方程式の制御的ハミルトニアン形式」として参照するつもりである．私たちの見方では，公式 (14) は，ハミルトンがハミルトニアンのために与えるべきものであった．そして，方程式 (19) は，”彼が書き下すべきであったハミルトンの方程式 ”である．

実際にハミルトンが書きくだしたものは（彼の記法ではなく，私たちの記法においては）

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{20}$$

であった．ここでは，$\mathcal{H}(q, p, t)$ は，p, q, t のみの関数である．そして，$\mathcal{H}(q, p, t) = \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t)$ で定義される．これは，(14) に似ているが，同じものでは全くない．その違いというのは，ハミルトンの定義においては，$\dot{q}$ は独立変数としてではないように取り扱われているが，q, p, t の関数として暗黙のうちに方程式

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \tag{21}$$

によって定義されているのである．もし「(21) で定義される写像 $(q, \dot{q}, t) \to (q, p, t)$ が逆に解かれるのであれば」，すなわち，もし私たちが ”(21) を q, p, t の関数として $\dot{q}$ に対して解くことができれば ”，(20) は (19) と等価であるということが簡単に分かる．実際に，$\mathcal{H}(q, p, T) = H(q, u(q, p, t), t)$ であるのは明白である．ただし，$u = u(q, p, t)$ は $p = \frac{\partial L}{\partial u}(q, u, t)$ を満たす．それゆえ，

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial q}. \tag{22}$$

$u = u(q, p, t)$ に対して，$\frac{\partial H}{\partial u}(q, u, t) = 0$ であるので，私たちは，(19) の解に沿って，$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q}$ であることが分かる．同様に，(20) の２番目の方程式もまた成立する．その逆は簡単に証明できる．

上の議論から ”制御的ハミルトニアン ”の言葉でオイラー-ラグランジュ方程式のハミルトニアンを再解釈するということは，少なくとも，古典力学と同じくらいに自然なことなので

ある．そして，おそらく，より簡単である．さらに言えば，その「制御的定式化」は少なくとも１つの利点を持っている．すなわち，

> (**A1**)　ハミルトン方程式の制御理論表現は，完全に一般的な条件の下でオイラー-ラグランジュ方程式系に等価である．それに対して，その古典表現は，変換 (21) が，$\dot{q}$ を q, p, t の関数として解くために，少なくとも局所的に，逆に解ける場合にのみ意味をなすということである．

さて，私たちは，(A1) が古典表現を超える，制御的観点の唯一の利点であるというわけではないことを示すつもりである．これを知るには，私たちは，ルジャンドル条件 (13) をもう一つの見方で見なくてはらない．$H(q, u, p, t)$ は，$-L(q, u, p, t)$ プラス u の線形関数に等しいので，(13) は次のものに完全に等価なのである：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q(t), \dot{q}(t), p(t), t) \le 0, \quad i.e., \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{q}^2}(q(t), \dot{q}(t), p(t), t) \le 0. \tag{23}$$

さて，(23) を (13) の３つ目の方程式と並べて書いてみよう：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad and \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \le 0. \tag{24}$$

そして，２，３秒その結果をじっと見つめてみよう (stare).

これらの方程式は，間違いなく何かを示唆している！　明らかに，ここで起こっていることは，H は u の関数として最大値を持っていなくてはならないということである．それゆえ，私たちは１つの予想として次のことを述べておく．

> 予想 M：(19)（あるいは，等価な形式 (10)）に加えて，最適化のための付加的な必要条件は，u の関数としての，$H(q(t), u, p(t), t)$ は各 t に対して最大値を取らなくてはならない．

予想 M は，ハミルトン方程式を ”ハミルトンがすべきであった ”ように，書き換えたことによる自然な帰結である．そして，もしハミルトンが実際にこれを行っていたのであれば，彼自身，あるいは他の１９世紀の数学者が (24) を書き下し，それによりこの予想に導かれただろうと推測するのはもっともらしいことである．逆に，(14) のハミルトニアンを使う場合にだけ，ハミルトニアンのハミルトン自身の形式に反するように,「ルジャンドルの条件は，u の関数の１次の u-微分が消えなくてはならないときに，u の関数の２次の u-微分の符号を決めなくてはらならない」ということが分かるのである．この関数は L 自身ではあり得ない．なぜなら，１次条件は $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$ とは言っていないからである．また，それは、u の関数ですらないハミルトンのハミルトニアン $\mathcal{H}$ にもなり得ない.「 ”制御的ハミルトニアン ”を使う時にだけ自然に予想 M に導かれるのである.」

予想 M が正しいと判明し，ひとたびその正しさが知られたとすれば，広大な応用が可能であるということが分かる．しかし私たちがそこへ行く前に，私たちは私たちの物語の次の章に進み，ワイエルシュトラスの業績を議論しなければならない．彼は，本質的に予想 M を発見し，そして証明したのだが，結果の単純さを不明瞭にする言葉を使ったために，彼の発見の深遠な意味を見逃してしまったのである．

10. 第二の分かれ道：ワイエルシュトラス

ワイエルシュトラス (1815-1897) は，$L(q,\dot{q})$ が速度 $\dot{q}$ に関して正の同次であるような（すなわち，$\alpha \geq 0$ で，全ての $q, \dot{q}$ に対して $L(q,\alpha\dot{q}) = \alpha L(q,\dot{q})$ で，時間に依存しない），ラグランジアン L に対する，$I = \int_a^b L(q(s),\dot{q}(s))ds$ の形式を持つ積分 I の最小化問題を考えた．（すぐに明らかになるように，私たちは，I のための表式における "時間 "変数として，t より s を使う良い理由がある．）

ある意味で，だれでもいつも L に関して "一般性を失うこと無く "，１つの新しい関数 $\Lambda(q,t,u,\tau) = \tau L(q,u/\tau,t)$ を定義することによって，この仮定を課すことができる．そして，t を１つの新しい変数 q と考え，q^0 と呼ぼう，そして τ を $\frac{dq^0}{ds}$ と考える．ただし，s は１つの新しい変数，あるいは，"擬時間 "である．実際の時間変数 t と混同してはいけない．しかしながら，"一般性を失うこと無く "というのは，危険な言い回しである．そして，"洞察を失うこと無く "という意味をまったく伴なわない．私たちは，ハミルトン方程式は (20) の形式で記述されるという支配的な見方と結びついて，この制約がワイエルシュトラスにその真の意味と彼が発見したこの新しい条件の遠大な影響力を見えなくしてしまったのかもしれないと思う。このことを以下に議論するつもりである．

ワイエルシュトラスは，独立変数 $q,\, u,\, \bar{u}$ の３つの集合に依存する，"超過関数 "

$$\varepsilon(q,u,\bar{u}) = L(q,\bar{u}) - \frac{\partial L}{\partial u}(q,u)\cdot\bar{u}, \tag{25}$$

を導入した．それから，彼は,「副次的条件：曲線 $s \mapsto q^*(s)$ がその最小値問題の解であるように，$q = q^*(s), u = \dot{q}^*(s)$ と完全に任意の $\bar{u}$ に対して計算される時，関数 ε は ≥ 0 でなくてはならない.」ということを証明した．

ワイエルシュトラスは，あらゆる s に対して $q(s)$ が $q^*(s)$ に近いが，必ずしも $\dot{q}(s)$ が $\dot{q}^*(s)$ に近い必要はないという意味において q^* の "小さな摂動 "である，参照曲線 q^* を，他の曲線群 $q(\cdot)$ と比べることによってこの副次的条件を導き出したのである．ワイエルシュトラスの条件は，$\dot{q}^*(s)$ に近い q に対する $L(q^*(s),u)$ を u の $\bar{u}$ 近くの $L(q^*(s),u)$ と比較するということを含んでいるので，$\dot{q}$ の大きな値を持つ変分 q が必要であるというが明らかである．

ワイエルシュトラスの同次性の性質を持つラグランジアンに対して，$L(q,u) = \frac{\partial L}{\partial u}(q,u)\cdot u$ であるということに注目しておこう．そして，ワイエルシュトラスが彼の超過関数を同じようにうまく次のように書いたことにも注目しておこう：

$$\varepsilon(q,u,\bar{u}) = L(q,\bar{u}) - \frac{\partial L}{\partial u}(q,u)\cdot\bar{u} - \left(L(q,u) - \frac{\partial L}{\partial u}(q,u)\cdot u\right). \tag{26}$$

(15) の $p = \frac{\partial L}{\partial u}(q,u)$ を使うと，私たちは,

$$\varepsilon(q,u,\bar{u}) = (L(q,\bar{u}) - \langle p,\bar{u}\rangle) - (L(q,u) - \langle p,u\rangle). \tag{27}$$

読者はただちにこれを

$$\varepsilon(q,u,\bar{u}) = H(q,u,p) - H(q,\bar{u},p) \tag{28}$$

と認識するだろう．ここで，H は "制御的ハミルトニアン "である．それゆえ，制御的ハミルトニアンの言葉で表現されたワイエルシュトラスの条件は，簡単に次のことを述べている：

(**MAX**) １つの最適曲線 $t \mapsto q^*(t)$ に沿って，もし私たちが (15) を通じて $p(t)$ を定義するなら，どの t に対しても，$u = \dot{q}^*(t)$ は u の関数としての（制御）ハミルトニアン $H(q^*(t), u, p(t), t)$ を最大化しなくてはならない．

ワイエルシュトラスの定式化において，彼の同次性の仮定を満足する特別なラグランジアンに対して，その条件は超過関数の言葉で述べられていた．その場合には，結果の H は，(28) のように時間に依存しない．しかし，もしワイエルシュトラスの条件を私たちが行ったように，H の言葉で書き直すのであれば，まず一般的なラグランジアンをとり，その最小化問題をワイエルシュトラスの形式の最少化問題に変換し，ワイエルシュトラスの条件を (MAX) の形式（それゆえ，特に，H が時間に依存しない）で書き，それから，変換をせず，元の形に戻すことができる．そこに書かれたように，その結果が最初の問題の制御的ハミルトニアンを持つ (MAX) である．それゆえ，ワイエルシュトラス条件は，もしそれが (MAX) におけるように再定式化されるのであれば，厳密に同じことを言っているあらゆる問題に対して成立するのである．

さらに，(MAX) はかなり簡単化できるのである．実際，$p(t)$ が (15) を通じて定義されるという必要条件は今は余分である：もし $H(q(t), u, p(t), t)$ が，u の関数と見なされて，$u = \dot{q}(t)$ で１つの最大値を持つとすれば，$\frac{\partial H}{\partial u}(q(t), \dot{q}, p(t), t)$ は消滅する．それゆえ，$p(t)$ は (15) によって与えられなくてはならない．さらに，$\frac{\partial H}{\partial u}(q(t), \dot{q}, p(t), t)$ が消える（ゼロになる）ということもまた，(19) の条件の１つとなる．そんなわけで，私たちは，(19) と (MAX) をいっしょにして以下のように述べることが出来る．：

(**NCO**) もし曲線 $t \mapsto q(t)$ が最小化問題 (1) の解であるとすれば，以下の３つの条件がすべての t で成り立つような関数 $t \mapsto p(t)$ が存在しなくてはならない．

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}\left(q(t), \dot{q}(t), p(t), t\right), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial p}\left(q(t), \dot{q}(t), p(t), t\right), \tag{29}$$

$$H\left(q(t), \dot{q}(t), p(t), t\right) = \max_u H\left(q(t), u, p(t), t\right). \tag{30}$$

最適化の必要条件の１つの解釈として，(NCO) は，もちろん，ルジャンドル条件と同じく，オイラー-ラグランジュの必要条件とワイエルシュトラスの副次的条件の組合わさった威力を１つの言明の中に覆い隠してしまう．これははっきりと (MAX) の結果として生じる．この統一的な言明によって達成される的確さと経済性に注意しよう：”超過関数 ”と呼ばれる余分な量をもたらすする必要がない．(30) が $p(t)$ を自動的に決定するために，$p(t)$ をどのように決めるかという公式すら必要としないことに注意しておこう．それゆえ，(19) の３つの方程式に新しいワイエルシュトラス条件を加えることが，４つというより，むしろ，３つの条件の新しい集合，”それぞれの部分の和よりずっと簡単な ”集合に帰着するのである．さらに，(MAX) — あるいは，もっと正確にいえば，(MAX) のワイエルシュトラスの副次的条件の一部 — が厳密に予想 M であるということに注意しよう．それゆえ，この段階で，私たちは，(MAX) は前述のように (24) によって強く示唆されていたので，おそらくハミルトンの業績のすぐ後に発見されただろうと結論できるのである．もしハミルトンの方程式が (14), (19) の形式で書かれていさえすれば，ワイエルシュトラスによってほとんど疑いなく発見されていただろう．

そういうわけで，私たちは今，古典的定式化を超えて，ハミルトンの方程式の ”制御的定式化 ”の利点のリストに２つの新しい事項を加えることができる：

> (**A2**) 制御的ハミルトニアンを使って，(24) のように，”ハミルトン形式 ”でルジャンドルの条件を書くことが，明らかな次のステップであっただろう．そして，これがただちに予想 M の定式化を導いただろう．この証明はその後すぐに行われただろう．

> (**A3**) 制御的ハミルトニアンといっしょになると，ワイエルシュトラスの副次的条件はずっと簡単になり,“ 過剰関数 ”を必要しなくなる．そして，ハミルトン方程式と結びついて最適化のための必要条件である，優美な統一的定式化 (NCO) になっただろう．

しかし，決してこれが私たちの話の終わりではない．その新しい定式化 (NCO) には美しさと簡単さ以上のものがある．もし (NCO) を前に書いた他の必要条件と比べるのなら，１つの顕著な新しい事実が明らかになる．実に面白いことに,「その変数 u に関する微分が消え去る」のである．これまでのすべての方程式は L や H の u-微分を含んでいた．そして，もし私たちが，u の関数ではなく，それゆえ u-微分のない，ハミルトンの方程式の古典表現 (20) を使うときですら，その事実は，(20) を得るために私たちは最初に u-微分を含む (21) を解かなくてはならないという，そのままなのである．

さて，もし最適化のための私たちの条件が u-微分を参照しないで記述されているとすれば，私たちはよく知られた「数学的推測の原理」[6]を適用できる．これは，その場合には L の u-微分の存在は必要とされないということを手短かに示唆している．それなら，u の値の範囲が空間全体であると強く主張する理由はもはやない：(30) に生じる最小化は任意の集合で意味を持つので，$\mathbf{R}^n$ の任意の集合は意味を持つに違いない．これは次のものを導く

> 予想 M2：$\dot q$ が $\mathbf{R}^n$ のある部分集合 U に属し，$L(q,u,t)$ が u に関して微分可能であるとは限らないという問題に対してさえ，(NCO) は依然として最適化に対する１つの必要条件であるだろう．

私たちは L が u に関して微分可能であるという制約条件から自由になったので，u — すなわち，$\dot q$ — は何でもいいとすべきである．(NCO) はまだ働くだろう．ひとたびこれが理解されたら，次の自然なステップはもう一度「数学的推測の原理」を適用することである．そして，$\dot q$ をさらに ”もっと任意に ”にすべきであろう．例えば，ある他の変数 u や q や t の一般的な関数にすべきだろう．それゆえ，$\dot q$ を u と書く代わりに，私たちは一般的な関数 $f(q,u,t)$ に対して，$\dot q = f(q,u,t)$ と書くことができるのである．その場合には，表現 $\langle p, u\rangle$ — すなわち，(14) に生じる $\langle p, \dot q\rangle$ — はもちろん，$\langle p, f(q,u,t)\rangle$ で置き換えられなくてはならない．これは以下のものを導く

> 予想 M3：”制御関数 ”$t \mapsto u(t)$(ただし $u(t)$ はある集合 U 内の値をとり，”完全に任意の ”U-値をもつ，t の関数であることを許される) と共に，q が微分方程式 $\dot q = f(q,u,t)$ を満たすように制限され，そして，ハミルトニアン H が

$$H(q,u,p,t) = \langle p, f(q,u,t)\rangle - L(q,u,t). \tag{31}$$

[6] もしある特別な制約の下で１つの言明が証明されるが，後にその制約がいらないと判明するなら，そもそもその制約は必要ないか，あるいは，その言明は制約なしに正しいかのいずれかである見込みが高いということ．

によって定義されるという問題に対してさえ，(NCO) は依然として最適化に対する１つの必要条件であるだろう．

最適制御理論に慣れ親しんでいる読者は，もちろん，予想 M3 は本質的に世に知られた ”ポントリャーギンの最大値原理 ”と同じものであると認識しただろう．

そして私たちは,「あらゆる」読者に，制御理論家でない人々にさえ，(NCO) は１つの自然な結論であると確信させたと望むのである．私たちの議論から，(NCO) が，”ハミルトンが書き下すべきだったハミルトンの方程式 ”から，ルジャンドル条件といっしょになることで，ただちに推測され得ただろう．そして，もし (14) や (19) のような，唯一の ”正しい ”ハミルトン定式化がすべてに沿って使われていたなら，ひとたび，ワイエルシュトラスがの副次的条件が知られたなら，ただちに (NCO) は１つの明白な予想であっただろうということが明解になったことだろう．

11. 最大値原理

これまでは，私たちは，予想 M3 は，もし正しい定式化と正しい眺望から古典力学を見れば，ほとんど私たちに押し付けられたようなものであるということを示して来た．しかし，私たちはまだそれが実際に真実かどうかについては何も言わなかった．また，どのようにその証明をするかということの指示も与えて来なかった．

しかしながら，簡単な例から分かるように，前述の予想 M3 は正しくはない．しかし，それを正しくするためにはちょっとした修正が必要なのである．私たちがしなければならないことは，１つの新しい p-変数，p_0 — ”異常乗数 ”[7] — を導入することである．そして，ハミルトニアンを次のように書く．

$$H(q,u,p,p_0,t)=\langle p,f(q,u,t)\rangle - p_0L(q,u,t). \tag{32}$$

私たちがこれまでずっと行って来たことは，$p_0=1$ に対応している．その代わりに，私たちは今度もっと弱い条件 $\dot p_0=0$（すなわち，p_0 は定数で $p_0\ge 0$）を課すことにするのである．それから，私たちは，もし古いものより新しい H を使うのなら，(NCO) の３つの条件が，もし私たちが自明な $p(t)\equiv 0, p_0=0$ を選べばいつも満たされるということを観察するのである．それゆえ，私たちの新しい条件は，私たちが，この可能性は除外されるということを述べている,「非自明性条件」をさらに課さない限り，何も興味深いことは生じない．

異常乗数 p_0 の導入と合わせた予想 M3 によって，私たちは最終的にまさに有名な「最大値原理」に到達する：

（**MP**）１つの集合 U に属する媒介変数 u と $\mathbf{R}^n$ 内 — あるいは，$\mathbf{R}^n$ の開部分集合 Q の — の値をとる変数 q，そして固定された時間区間 $[a,b]$ を持つ汎関数 $I=\int_a^b L(q(t),u(t),t)dt$ を，動的条件 (3) と終点条件 $q(a)=\bar q$, $q(b)=\hat q$ の下で最大化する問題に対して，$[a,b]$ 上の関数 $t\mapsto u^*(t)$ と，対応する (3) の解 $t\mapsto q^*(t)$ がその最大化問題を解くための１つの必要条件は，次のことが成り立つように，関数 $t\mapsto p^*(t)\in\mathbf{R}^n$ と制約条件 $p_0\ge 0$ が存在することである：

(NT) すべての $t\in[a,b]$ に対して，$(p^*(t),p_0)\neq(0,0)$；

(HS) $t\in[a,b]$ に対して，$\dot q_*(t)=\frac{\partial H}{\partial p}(\Xi_*(t))$ と $-\dot p_*(t)=\frac{\partial H}{\partial q}(\Xi_*(t))$；

[7]異常乗数の必要性は，１９１３年にボルザによってすでに認識されていた．[3] 参照．

(MC) $t \in [a,b]$ に対して，$H(\Xi_*(t)) = \max_{u\in U} H(q_*(t),u_*(t),p_*(t),t)$.
ここでは，私たちは，$\Xi_*(t) = (q_*(t),u_*(t),p_*(t),p_0,t)$ と書き，ハミルトニアン $H(q,u,p,p_0,t)$ は (32) で与えられる．

条件 (NT)，(HS)，(MC) は，それぞれ,「非自明性条件」,「ハミルトニアン系」,「最小化条件」と呼ばれている．(HS) はまさに (29) の言い換えであり，(MS) は (30) の言い換えであるということに注意しよう．(HS) の２番目の方程式は「随伴方程式」と呼ばれる．(MP) の性質を持つ p^*, p_0 が存在する，軌道制御の組 (q^*,u^*) は「停留曲線」と呼ばれる．

最後に，私たちは，古典的な変分計算に対して，(MP) が厳密に (NCO) と同じ結論を導くということに注意して置く．実際，この場合には，$p_0 = 0$ の可能性を除外でき，(MP) は (NCO) に還元されるのである．それゆえ，前述のように，(MP) は必要条件 (NCO) の本当の一般化なのである．これは，古典的変分原理の手段では扱うことのできない数多くの問題に適用可能なのである．

可変な時間区間を持つ問題に対する (MP) の類似物を与えることにより，私たちは以下のことを結論する：

(**MP’**)　(MP) で議論された種類の最小化問題に対して，しかし，前もって固定していない時間区間 $[a,b]$ を持つ最小化問題に対して，f と L が t に依存しないと仮定すると，その必要条件は厳密に (MP) の必要条件プラス余分な制約条件 $H(q^*(t),u^*(t),p^*(t),p_0) \equiv 0$ ということと同じになる．

言明 (MP’) は，特に「最小時間問題」，すなわち，$L \equiv 1$ の問題に適している．

12. 原理から定理へ

これまでのところ，私たちの議論は，最適化のための必要条件の形式的側面だけを取り扱って来た．実際の数学定理を得るために，私たちは L，f や U に関する技術的仮定，問題の厳密な述べ方，そして結論の正確な意味については，正確でなくてはならない．

オイラー-ラグランジュの方程式から最大値原理までの，これまでのセクションの結果は，定理というよりは「原理」と見なされなくてはならない．私たちにとって,「原理」とは定理の生成機である．技術的詳細に照らし合わせ，あらゆる定義と条件を完全に精密化することによって定理にすることができる，まだ完全には正確でない言明のことである．結果としての定理は，原理の「表現」である．通常、技術的条件の選択は１つ以上の方法で行われる．だから，”原理 ”は１つの表現以上に存在する．

ある場合には，１つの ”原理 ”は数学者の精神には「最初に」公表された厳密な表現と同一視される．これは，最大値原理の場合にもある程度生じている．なぜなら，その本 [8] は，そこで最初の結果が公表されたのだが，すでに厳密な表現を含んでいたからである．しかしながら，私たちはこの表現はその原理の全威力を使い尽くしていないと強く主張する．そして，より強く，より一般的な表現を表現したり証明することはいまだに進行中なのである．

最適制御に対する必要条件に関して，新しいもっと一般的な形式的条件の発見が進歩した間，形式的結果の厳密な表現はその過程のあらゆる段階で，それぞれの場合にその当時に利用できる数学的道具を使って証明された．

最大値原理の最初の厳密な表現は，その本 [8] に登場した．この ”古典的な ”表現は他の著者たちによって証明されたのである．私たちは，L. D. ベルコヴィッツの１９７４年の本 [2] に現れた表現を引用する．

f の要素を $f^1, \ldots, f^n$ とする．L を f^0 と書く．$i = 1, \ldots, n$ に対して f^i は，$Q \times U_0 \times [a, b]$ で定義されると仮定する．ここで，Q，U_0 はそれぞれ $\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{R}^m$ の開集合である．さらに，各 $(u, t) \in U_0 \times [a, b]$ に対して，各関数 $q \mapsto f^i(q, u, t)$ は q に関して C^1 類 (class) であるように要請される．そして，各写像 $(u, t) \mapsto f^i(u, t)$ は各々固定した $q \in Q$ に対してボレル測度でなくてはならない．集合 U は U_0 の部分集合である.「１つの許容される制御」は，次のような写像 $[a, b] \mapsto u(t) \in U$ である．そこで，すべての $(q, t) \in K \times [a, b]$, すべての $i = 0, \ldots, m$ に対して，境界 $\| f^i(q, u(t), t) \| + \| \frac{\partial f^i}{\partial q}(q, u(t), t) \| \leq \varphi_K(t)$ であるように，Q のどのコンパクトな部分集合 K に対しても１つの可積な関数 $t \mapsto \varphi_K(t)$ が存在する．$[a, b]$ 上の U-値関数の一般的な類 $\mathcal{U}$ と $\bar{q}, \hat{q} \in Q$ に対して，すべての組 $(q(\cdot), u(\cdot))$ の集合を記述するために $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \bar{q}, \hat{q})$ を使おう．その時，$u(\cdot) \in \mathcal{U}$，$Q(\cdot)$ は (3) の解（すなわち，(3) がほとんどすべての t に対して成り立つように，$q(\cdot)$ は絶対連続の曲線 $[a, b] \mapsto Q$ である），$q(a) = \bar{q}$ と $q(b) = \hat{q}$．すべての許容される制御の類を記すために $\mathcal{U}_{adm}$ を使おう．その時，最適化問題は，類 $\mathcal{C}(\mathcal{U}_{adm}, \bar{q}, \hat{q})$ における，積分 $I = \int_a^b L(q(t), u(t), t)dt$ を最小化する問題となる．この定理の結論が，p^* が絶対連続で，随伴方程式と最小化条件がほとんど至る所で維持されるという場合の (MP) の結論である．

最大化原理のこの最初の表現の証明はかなり長い．だから，私たちはここにはその概略を述べるつもりはない．それ以来，より強い表現が最初の表現の仮説を弱めること，あるいは，結論をより強めること，あるいは，その両方によって得られて来たのである．

古典的表現の１つの重要な改良は,「非平滑解析」から得られた（クラーケ [4, 5] を参照）．これらの ”非平滑 ”の一般化が発見される間，他の著者たちは非常に滑らかな系に対して異なる方向を追求していた．彼らは，古典的証明に使われたものよりもっと豊かな変分計算を許すことにより，もっと強い結果を得ることができるということを観察していた．その時，人は ”最適化に対する高次の必要条件 ”を得ることができる．加えて，３つ目の方向が進歩した．そこでは，制御される微分方程式 $\dot{q} = f(q, u, t)$ のためではなく,「微分的内包」$\dot{q} \in F(q, t)$ のために，(MP) が定式化されたのである．そこでは，F は集合-値写像である（例えば，[5] を参照）．参照された結果は，異なる方法で証明される．また１つの定理に結合されることはあり得ない．私たちは，なぜそうなのかを説明するつもりはない．なぜなら，そうするためには，それぞれの場合で異なる構成を使い，これらの構成が全区間で正しいたった１つの表現に結びつけることが不可能であるということを示すことによって，これらの定理の証明を詳細に議論しなくてはならなくなるだろうからである．しかし，１つの事実が現れた．いろいろな証明の非互換性のために，あらゆる場合に適用可能で，それらを統合する — すなわち，上述の ”雑種の ” 問題に適する— ような，１つの定理は，２，３年前までに，到達するのは困難であるということが分かったのである．しかしながら，最近，私たちの１人 (サスマン [10-12]）は，上のすべてを含み，ある新種の場合にも同様に適し，なおかつその ”雑種 ”の場合も適用可能である，(MP) の一般的な表現を得たのである．

13. 最速降下と制御のための最終章

私たちは，最適制御の観点から最速降下問題に戻ることによって，今度こそ結論を導きたい．

私たちは，x, y 平面内の最適制御の問題としてベルヌーイの問いを定式化できる．この力学は

$$\dot{x} = u\sqrt{|\, y\,|}, \quad \dot{y} = v\sqrt{|\, y\,|}, \tag{33}$$

のように与えられる．ここで，制御は集合 $U = (u, v)$: $u^2 + v^2 = 1$ の中で値を持つ，２次元のベクトル (u, v) である．

その時，ハミルトニアン $H(x, y, u, v, p, q, p_0, t)$ は（$\alpha = \text{sgn } y$ を使うことで）公式 $H = (p_1 u + p_2 v)\sqrt{\alpha y} - p_0$ で与えられる．そして，(NCO) の適用により，条件

$$u = \frac{p_1}{|\, p\,|}, \quad v = \frac{p_2}{|\, p\,|} \tag{34}$$

が得られる．ここで，$|\, p\,| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$．同様に，微分方程式

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -\alpha \frac{p_1 u + p_2 v}{2\sqrt{\alpha y}} = -\frac{\alpha\,|\, p\,|}{2\sqrt{\alpha y}} \tag{35}$$

が得られる．$|\, p(t)\,| \neq 0$ に注意しよう．実際，(MP') は $H = 0$ を言っている，それゆえ，$|\, p\,| = 0$ は $p_0 = 0$ を意味する．これは (NT) に矛盾する．

もし定数 p_1 が消えるのなら，$\dot{x} \equiv 0$．それゆえ，私たちは垂線を得る．そうでなければ，$\dot{x}$ は連続であり，いつも $\neq 0$ である．これは私たちがいつも解の媒介変数に x を使うことができるということを示している．$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v}{u} = \frac{p_2}{p_1}$ であるので，私たちは $1 + y'(x)^2 = \frac{|p|^2}{p_1^2}$ と

$$y''(x) = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{dp_2}{dx} = \frac{\dot{p}_2}{p_1 \dot{x}} \tag{36}$$

を持つ．しかし (33) と (34) は $\dot{x} = \frac{p_1\sqrt{\alpha y}}{|p|}$ を意味している．そして，方程式 (35) と (36) は $y''(x) = -\frac{|p|^2}{2yp_1^2}$ を導く．それゆえ，$2yy'' = -\frac{|p|^2}{p_1^2} = -(1+y'^2)$ となる．そして，$1+y'^2+2yy'' = 0$ となる．これは厳密に方程式 (9) である．前述のように，これは ”疑似解 ”を得ることなく，サイクロイドに導く．この議論は，どんな離散化も境界を横切る光線の屈折も使っていないということに注目しよう．

そしてまた,「私たちの制御的議論では，解曲線が関数 $y(x)$ のグラフとして表現できるという仮定はしなかった」ということに注意しておこう．私たちはそれを証明した！(変分計算の場合では，これは余分の仮定であった，上述の ”最速降下問題のベルヌーイの解 ”参照.）

これは最速降下問題に対する,「最適制御法が古典的変分計算よりずっといい結果を与える」ということを示している１つの例である．

上で考えて来たことのすべてが，ベルヌーイの最速降下問題におけるような，完全に x 軸の上にある最適軌道の計算に適用されるのである．しかしながら，(33) に対応する最小時間の制御問題に対する自然な数学的問題設定は全平面である．これが私たちが (33) で $\sqrt{y}$ の代わりに $\sqrt{|\, y\,|}$ と書いた理由である．それゆえ，このもっと一般的な問題を解こうと試みる．すなわち，媒質が「全平面」で光速度が $\sqrt{|\, y\,|}$ である時，光線を見いだそうとするのが自然である．この問題は，$\mathbf{R}^2$ の２点 A，B が例えそれらが x 軸の反対側にある場合でもふさわしい経路によって結びつけられるという意味で，”完全に制御されている ”ということに注意しよう．(33) の右辺は x 軸に沿って消える．しかし，これは，x 軸を交差する実現可能な

経路が存在するということを妨げない．なぜなら，関数 $\sqrt{|\,y\,|}$ は x 軸の近くではリプシッツではないからである.（もしその関数がリプシッツであるのなら，常微分方程式の通常の一意性定理によって，x 軸上にある１点を通るどの解も定数曲線でなくてはならない.）しかしながら，系を制御できるようにする同じリプシッツでない性質はまた，これらのすべてがリプシッツ参照ベクトル場を必要とするので，ロジャシヴィクツ表現を含む古典的かつ非平滑表現において最大値原理を適用不能にするのである．

例えば，私たちが A から B への最適軌道を見つけたいとしよう．ここで，A は上半面にあり，B は下半面にある．その時，人はまず最初に最適軌道 ξ が存在するということをアスコリの定理を使って示すことができる．次に，最適性のための通常の必要条件，例えば，オイラー-ラグランジュの方程式やあるいは最大値原理の古典表現を使って，閉じた上半面あるいは閉じた下半面に完全に含まれている最適軌道の任意の部分が，(5) によって与えられるサイクロイドであるか，あるいは，そういうサイクロイドの x 軸に関する反射であるということを示すことができる．次に，人は，ξ は x 軸を一回以上は進むことができないと分かる.（これは私たちが例題として残す１つの初歩的かつ定性的なレンマを必要とする.）それゆえ，私たちは ξ が x 軸の点 A から点 X まで進むサイクロイドからなり，それに X から B まで進む反射したサイクロイドが続くということを知るのである．X を見いだすことが残っている．

この結果は右辺のリプシッツ連続性 — 連続性さえも — を必要としないために,「[12] の表現が適する」と判明する．そして，参照となる軌道が「半微分可能な流れ」から生じる限り，それは機能するのである．詳細については，私たちは読者に [12] を参照してもらうことにする．

私たちは，ベルヌーイのサイクロイドの最適性の厳密な証明の問いを議論することにより,「最速降下問題に対する最適制御法の優秀性を示している」もう一つの例で終わりにしたい．はっきりしていることに，最適性に対する必要条件だけに基づく議論は，任意の軌道が最適であるということを決して証明しないだろう．もし私たちがベルヌーイのサイクロイドの最適性を本当に証明したいのなら，もう一つの余分な段階が必要である．例えば，A と B を結ぶ最適軌道の「存在」を証明することで十分だろう.（これがひとたび実現されたら，最適軌道がベルヌーイのサイクロイドであるということが導かれるのである．なぜなら，この曲線はその必要条件を満たす，A と B を結ぶ唯一の経路であるからである．その完全な証明はもうちょっと複雑である．なぜなら，B に到達する前に１回以上 x 軸に触れるサイクロイドを除外するために，もう一つ余計な議論が必要だからである.）古典的な変分計算の観点からは，これは難しい問題である[8]．　なぜなら，(8) で与えられたラグランジアンは $y=0$ で特異点を持つからである．しかしながら，最適制御においては，その存在問題は自明である．なぜなら，望む結果を得るためにアスコリの定理をそのシステム (33) に適用することで十分だからである．

はたしてベルヌーイは彼の問題をこういうふうに見るのは好きであっただろうか？　彼は最適制御がそれを取り扱う時の優美さを認めてくれただろうか？　彼は変分計算法よりこの方法を気に入ってくれただろうか？　私たちは読者に判断してもらいたい．

14. 参考文献

[1] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, NY, 1937.
[2] L. D. Berkovitz, *Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New Yorl, NY, 1974.

[8]私たちはこの点に注意を喚起してくれた F. H. クラーケに感謝する．

[3] O. Bolza, "Über der 'Anormalen Fall' beim Lagrangeschen und Mayerschen Problem mit gemischen Bedingungen und varibablen Endpunkten", *Mathematische Annalen*, vol. 24, pp.430-446, 1913.

[4] F. H. Clarke, "The Maximum Principle Under Minimal Hypothesis", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 14, 1078-1091, 1976.

[5] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley Interscience, New York, 1983.

[6] K. D. Elworthy, W. N. Everitt, and E. B. Lee, eds., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Control Science: A Festschrift in Honor of Lawrence Markus*, Marcel Dekker Inc., New York, NY. 1994.

[7] H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th to the 19th Century*, Springer Verlag, New York, NY. 1981

[8] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, NY, 1962.

[9] D. J. Struik, ed., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.

[10] H. J. Sussmann, "A Strong Version of the Lojasiewicz Maximum Principle", in *Optimal Control of Differential Equations*, N. H. Pavel ed., Marcel Dekker Inc., New York, NY. 1994.

[11] H. J. Sussmann, "A Strong Version of the Maximum Principle Under Weak Hypothesis", in *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL., pp.1950-1956, 1994.

[12] H. J. Sussmann, "The Maximum Principle of Optimal Control Theory", in preparation.