貯蓄の数学的理論

F. R. ラムゼイ

1. 基礎理論

私が解決したいと思う最初の問題がこれである：国民はいくらの貯蓄を蓄えることが出来るか？　この問いに答えるために、驚くほど一般的な条件の下で、ある簡単な規則が正しいと判明する；その規則とは、後でもっと詳しく明確にされることだが、次のようなものだ。

お金の限界効用をかけ算した貯蓄率は、効用の享受 (enjoyment of utility) の正味の比率の全体が、この金額により可能な限り最大の享受の比率に達しなくなるような、ある金額にいつも等しくなるべきである。

この規則を正当化するためには、もちろん簡単化のための様々な仮定をする必要がある：我々の社会は享受に対するその数やその許容量において、労働を嫌うことにおいても永久に変化が無い；異なる時間における享受や犠牲は独立に計算でき、足し合わせが出来る；そして富の累積だけが条件づけられると見なされることを除き、新発明も組織改革も導入されない。[1]

おそらく次の一点がもっと特別に強調されるべきである；我々は、もっと以前の享受と比べて、後の享受を割り引くことをしないと仮定する、倫理的に防ぎ得ず、想像力の弱さから単に生じる行為；しかしながら、我々はセクション II で我々の研究のいくつかにおいてそういった割引率を含むつもりである。

我々はまた、実際、社会の構成員の間で消費と労働が分布する仕方は、それらの総量だけに依存するという仮定をして、分布的な考察もいっしょに無視するので、全満足度はこれらの総量だけの関数となる。

これに加えて、我々は異なる種類の商品、異なる種類の労働の間の差異を無視し、定まった標準の言葉でそれらを表現するので、我々が単に資本や消費や労働の総額をそれらの特別の形式を議論すること無く語ることが出来る。

外国の国民が安定状態にあると仮定されるなら、外国貿易、すなわち賃貸は必ずしも除外しないので、彼らとの取引の可能性が生産の一定条件で含まれる。しかしながら、我々は永遠に外国人への負債が増大して行くという状態の可能性を除外する。

最後に、社会は関心の累積と同じいつも同じ動機に支配されなくてはならないだろうと我々は仮定しなくてはならないので、貯蓄が次世代によって身勝手に消費される機会はない；そして関係ある将来における、どの時点でも、それまでの蓄積が消し去られるというような不幸が起こらない。

Date: June 22, 2011, translated to Japanese by Kazumoto Iguchi. Original Paper: F. R. Ramsey, "A Mathematical Theory of Saving", The Economic Journal, Vol. 38, No.152, pp. 543-559, Dec. (1928).

[1]すなわち、それらはある程度の累積なしには起こりえないだろうというようなことでなくてはならないが、その程度が与えられたら見越すことができる。

それでは、時刻 t における我々の社会の消費と労働の全比率を $x(t)$ と $a(t)$ によって、そして社会資本を $c(t)$ によって記述しよう。社会の収入は労働と資本の一般的な関数であるとして、$f(a,c)$ と呼べるだろう；その時、貯蓄＋消費＝収入でなくてはならないことから、我々は

$$\frac{dc}{dt}+x=f(a,c) \tag{1}$$

を得る。

さて、消費率 x の効用率の全体を $U(x)$、労働率 a の非効用率を $V(a)$ で記述する；そして対応する限界比率を我々は $u(x)$ と $v(a)$ と呼ぶつもりである；その時、次のようになる：

$$u(x)=\frac{dU(x)}{dx}, v(a)=\frac{dV(a)}{da}$$

我々は通常 $u(x)$ は決して増加せず、$v(a)$ は決して減少しないと仮定する。

さて我々は我々の議論で非常に重要な概念を導入する。我々は与えられた資本 c を持ち、それを増大も減少もしないと仮定する。その時、$U(x)-V(a)$ は時間あたりの正味の享受を記述する。そして、我々の消費 x が労働 a と資本 c で生産できるものに等しいという条件の下で、我々はこれを最大化する。その結果としての享受率 $U(x)-V(a)$ は c の関数であり、資本が増せば増すほど享受が増すから、c が増大すると、ある一点まで増加する。

しかしながら、資本量と共に享受率が増大することは２つの理由で止る。最初に、資本のさらなる増大が我々の収入かレジャーのいずれかを増加できないということが生じた場合；あるいは、第２に、我々は考えられる限り最大の享受率に到達したにちがいなく、そしてさらなる収入とレジャーは無駄であるという場合。いずれの場合にも、ある有限の資本が、これが考えられる限り最大の比率であったかどうかという、経済的に獲得可能な享受の最大の比率を与えるだろう。

一方、享受率は資本が増加しても決して増大を止めない。その時、２つの論理的可能性がある：享受率が無限大へ増加するか、あるいは、ある有限量に漸近的に近づくかのいずれかである。これらの第一では、我々は経済的原因だけではある有限の享受率（考えられる限り最大の比率と呼ばれた）を与えることは決してできないという土台を棄却するつもりである。第２の場合が残る。この場合では、享受率は有限量に近づく。これは獲得可能な最大の比率に等しくも等しくなくもなり得る。この極限は、厳密に言えばそれが達成されることは無く、単に無限に近づくのだけれども、この極限を我々は享受率の ”獲得可能な ”最大の比率と呼ぶつもりである。

いくつかの場合で我々が享受あるいは効用の獲得可能な最大の比率と呼んだものを手短かに *Bliss*（至福）あるいは B と呼ぶ。そしてあらゆる場合に我々は社会は有限時間の後に *Bliss* に到達するか、少なくともそれに無限に近づくかのいずれかのために貯蓄しなくてはならない。というのは、このような方法においてのみ、この額では享受が時間を通じて有限量に総和された至福に達しないという、金額にすることができる；だから、もし至福に到達可能か無限にそれに接近できるのであれば、これは他のどんな作用コースよりも無限に多く望まれるものである。そして、それはきっと可能であるだろう。なぜなら毎年少量をわきへ

おいておくことによって、我々が我々の資本を任意の望む程度まで時間内に増加させることが出来るからである。[2]

それゆえ、ある時間で至福に到達するか接近するように、十分なものが貯蓄されなくてはならない。しかしこれは必ずしも我々が全収入を貯蓄しなくてはならないということを意味するものではない。より多くを貯蓄すれば、より早く我々は至福に到達する。しかし、より少ない享受を今持つことになるだろう。そして、他のものに対してこっちを置かなくてはならない。ケインズ (Keynes) 氏が私に示したことは、貯蓄すべき金額を支配する規則はこれらの考察からただちに決定できるということである。しかし彼の議論を説明する前に、後々我々が考察するもっと一般的な問題において使用されることになる方程式を発展させておくのが最も良いことだろう。

これらの最初は、任意の時間で労働の限界非効用を、労働の限界有効性とその時間の消費の限界効用の積に等しいと置くことから出て来る。すなわち、

$$v(a) = \frac{\partial f}{\partial a} u(x) \tag{2}$$

第 2 は、時刻 t での消費の増加 Δx から導かれる利点を無限小の期間 Δt の間に消費を遅らせることから得られるものに等しい。これは、その量を $\Delta x \left(1 + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta t\right)$ に増加するだろう。というのは、$\frac{\partial f}{\partial c}$ が待つことによって得られる利率を与えるからである。これは次式を与える：

$$u\{x(t)\} = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta t\right) u\{x(t + \Delta t)\}.$$

あるいは極限において

$$\frac{d}{dt} u\{x(t)\} = -\frac{\partial f}{\partial c} \cdot u(\{x(t)). \tag{3}$$

この方程式は $u(x)$（消費の限界効用）が利率によって与えられる適切な比率に落ちることを意味している。結果的に、もし $\frac{\partial f}{\partial c}$ か $u(x)$ のいずれかがゼロにならないか、あるいは、ゼロになるまで x は徐々に増大する。この場合に至福が達成されたと見ることは容易い。

c_0（国が $t = 0$ で出発する時に与えられた資本）と、その他には、$t \to \infty$ での関数の振る舞いに関して考察することによって供給される ”初期条件 ”を知っているのなら、方程式 (1), (2), (3) は我々の問題を解くのに十分である。

[2]現状では、この議論は不完全である。というのは、上で考察された最後の場合には至福は資本が無限に転じるにつれ全収入を消費し、そしてさらなる資本の増大のため準備をしないでいることによって得られる享受の限界値であったからである。n 番目の年に £$\frac{1}{n}$ を貯蓄することは資本を無限に増加させるためには十分であるだろう（というのは、$\sum \frac{1}{n}$ が発散するからである）、そして、収入と消費の限界値が同じになるように、収入の損失（£$\frac{1}{n}$）がその時ゼロに減少すると注意することによって、欠落した部分が簡単に満たされる。

これらの方程式を解くために、我々は次のことを実行する：x, a と c がすべて、１つの独立変数（時間）の関数であると注意すると、我々は（(2), (3) と (1) を使って）

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{u(x)\cdot f(a,c)\} &= \frac{du}{dx}\cdot f(a,c)+u(x)\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dx}+u(x)\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dt}\frac{dt}{dx}\\ &= \frac{du}{dx}f(a,c)+v(a)\frac{da}{dx}-\frac{du(x)}{dt}\{f(a,c)-x\}\frac{dt}{dx}\\ &= x\frac{du}{dx}+v(a)\frac{da}{dx}.\end{aligned}$$

結果として、部分積分により、

$$u(x)\cdot f(a,c)=xu(x)-U(x)+V(a)+a\ \ constant\ \ K,$$

あるいは、

$$\frac{dc}{dt}=f(a,c)-x=\frac{K-\{U(x)-V(a)\}}{u(x)}. \tag{4}$$

さて我々は K を我々が B あるいは至福と呼んだものと同一視する。これが異なる方式で始める上で最も簡単にできることである。

$\int_0^\infty(B-U(x)+V(a))dt$ は、享受が時間を通して蓄積した至福に達しない総額を表している；これは有限量である（あるいは、とされ得る）、そして我々の問題はそれを最小化することでる。もし我々がただちに (1) を使って変分計算を応用するのなら、我々は再び方程式 (2) と (3) を得る；しかし最初からこの代わりにもし我々が独立変数を c に変えれば、我々は非常に簡単化できる。我々の積分は

$$\int_{c_0}^\infty \frac{B-U(x)+V(a)}{dc/dt}dc,[3]$$

あるいは、(1) を使い、

$$\int_{c_0}^\infty \frac{B-U(x)+V(a)}{f(a,c)-x}dc.$$

今この式中の x と a が c の完全に任意の関数であり、積分を最小化するためには、我々は被積分関数の偏微分をゼロに等しいとすることにより被積分関数を単純に最小化しなくてはならない。x に関する微分をとって、我々は

$$\frac{-u(x)}{f(a,c)-x}+\frac{B-U(x)+V(a)}{\{f(a,c)-x\}^2}=0;$$

[3] この上限は ∞ ではないだろうが、もしこれが有限であれば、至福が達成される最小の資本である。c は積分がゼロになるまで、変換が許容されるまように、時間と共にゆっくりと任意の割合で増加する。

結果として、

$$\frac{dc}{dt} = f(a,c) - x = \frac{B - (U(x) - V(a))}{u(x)}. \tag{5}$$

あるいは、一番最初で述べたように、

> 消費の限界効用を掛けた貯蓄率はいつも至福 – 享受の効用の実際の比率に等しい。

ケインズ氏は、私はいくつか他の提案を私にしてくれたこと対して彼に恩義があるのだが、この結論は以下の単純な理由から得られるものであると教えてくれた。

我々が１年間で $£x$ を消費し $£z$ を貯蓄するとしよう。その時、余計に $£1$ 消費されたことから得られる利益が $u(x)$（資金の限界効用）である。これは $£1$ だけ少ない貯蓄によって負わされた犠牲に等しくなくてはならない。

１年で $£1$ 少ない貯蓄は、我々が、以前のような１年の時間ではなく、$1+\frac{1}{z}$ 年の時間で $£z$ だけ貯蓄するであろうということを意味する。結果として、我々が１年の時間でしたことが我々は厳密に $1+\frac{1}{z}$ 年の時間内でできるようになることであろう。そして我々の至福へ接近するための全コースが１年で $\frac{1}{z}$ だけ遅れることになるので、我々が１年の $\frac{1}{z}$ だけ少ない至福を喜び、1 年で $\frac{1}{z}$ だけより多く我々の現在の比率で喜ぶだろう。それゆえ、犠牲は

$$\frac{1}{z}\{B - (U(x) - V(a))\}$$

となる。

これを $u(x)$ に等しいとすると、もし我々が z を $\frac{dc}{dt}$（その限界値）と置き換えるのなら、我々は再び方程式 (5) を得る。

不幸にもこれは我々が時間－割引する時には応用することができない。それゆえ、私は私の方程式 (1) – (4) を保有しておきたいと思う。これらは容易にもっと難しい問題を扱うために拡張できる。

この規則の最も顕著な特徴は、これが至福（すなわち、獲得可能な最大の効用率）を決定するような場合を除き、生産関数 $f(a,c)$ に全く独立であるということである。特に、我々が与えられた収入から貯蓄すべきである金額が、もしこれが実際にゼロでないのなら完全に現在の利率に独立であるということである。もし未来が一定の割合 ρ で割り引かれ、利率が一定で r に等しいなら、貯蓄されるべき収入の割合が ρ/r の関数であることを我々が見いだす時、この結果のパラドックス的な本質は後である程度軽減されるだろう。もし $\rho = 0$ ならこの割合はゼロ（もし r がゼロでなければ）であり、貯蓄されるべき割合は結果的に r に独立となる。

以下の表から分かるように、その規則が要する貯蓄率は、人が普通に提案するものよりずっと多くなる。この表は単に例証のためにおいたものである。

もし我々が労働の金額の変化を無視するのなら、$£500$ の家族収入から貯蓄すべき金額は $£300$ になるだろう。というのは、その時、至福 – 実際の効用率 $= 8 - 3 = 5$ である。貯蓄 $= £300$ であり、 $£200$ の消費の限界効用 $=$ 約 $\frac{1}{£60}$ である。(放物線フィットで近似して、$£150$

Table 1. 1年ごとの家族収入 vs 全効用

1年ごとの家族収入	全効用
£150 ⋯ ⋯ ⋯	2
£200 ⋯ ⋯ ⋯	3
£300 ⋯ ⋯ ⋯	4
£500 ⋯ ⋯ ⋯	5
£1000 ⋯ ⋯ ⋯	6
£2000 ⋯ ⋯ ⋯	7
£5000 ⋯ ⋯ ⋯	8 = 至福 (Bliss)

から £300 まで、$U(x) = \frac{13x}{300} - 3 - \frac{x^2}{15{,}000}$ であるので、もし $x = 200$ なら $u(x) = \frac{13}{300} - \frac{x}{7{,}500} = \frac{1}{60}$ となる。)

ここで、我々の結論が我々が仮定を簡単化するために無視して来た考察によってどの程度まで影響されるかを考えるために、ちょっと小休止するのが良いだろう。人口増加の可能性はもっと貯蓄をする理由になる。それゆえ、将来の発明が至福を今のレベルよりもっと高いレベルに引き上げる可能性が現われる。その一方、将来の発明と組織の改良が現在より少ない犠牲によって収入を得られ易くするという可能性は貯蓄を減らす理由になる。こうして発明の効果は２つの反対の方向に働く：発明は、もし我々が前もって貯蓄したなら我々がもっと満足できるという新しい必要性をもたらす。しかし発明はまた我々の生産能力を増加させ、予備段階の貯蓄を急用性のないものにする。

無視された最も深刻な因子は、我々の蓄積を破壊する将来の戦争や地震の可能性である。これらは、長期間にわたる非常に低い利率をとることによっては適切に説明することができない。というのは、将来の戦争や地震は利子だけでなく元金もまた負にするように破壊して、それらは実際に利率を負にするからである。

2. 基礎理論の応用

さて、私は

$$f(a, c) = pa + rc,$$

のように、資本と労働への報酬が一定で独立であると仮定したいと思う[4]。ここで p は賃金の比率であり、r は利率であり、共に定数である。

この仮定は以下のようなことを可能にする。

- (a) 我々の以前の解を簡単な図で表現すること；
- (b) 有限時間に生きる個人の場合にそれを拡張すること；

[4]注意すべきことは、(a) の多くの場合、我々は報酬の独立性だけを必要とし、一定性は必要としない。また我々はどこにも賃金が一定であるという要請をしていないが、これらの仮定は物事を簡単に述べるには欠かせない。もし状態が単にゆっくりと前進していくものの１つであったとしたら、これらの仮定はあまり馬鹿げてはいないので、利息や賃金の比率は我々の特別な状態が貯蓄し利益を生むものには全く独立なのである。

(c)　将来の効用や非効用が一定の割合で割り引かれる問題を含むように拡張すること。

我々の新しい仮説に関して社会の収入は、はっきり定義される 2 つの部分、pa と pb に分かれる。これらはそれぞれ勤労所得と不労所得と呼ぶのが便利である。

2.1. **(a) 解を簡単な図で表現すること.** 方程式 (2) は、今は

$$v(a) = pu(x)$$

である。これは a を x だけの関数として決定する。そして便利なように次のようにおく：

$$y = x - pa = \text{消費} - \text{勤労所得},$$
$$w(y) = u(x) = v(a)/p,$$
$$W(y) = \int w(y)dy = \int (u(x)dx - v(a)da) = U(x) - V(a).$$

$W(y)$ は不労所得の全効用、$w(y)$ は不労所得の限界効用と呼ばれる。というのは、それらは消費に利用される不労所得 y を持つことから生じる、全体の効用と限界効用であるからである。

さて方程式 (5) は以下のものを与える：

$$rc - y = f(a,c) - x = \frac{B - W(y)}{w(y)} \tag{6}$$

あるいは、

$$B - W(y) = \frac{dW}{dy}(rc - y).$$

これが意味することは、点 (rc, B) が y における曲線 $z = W(y)$ への接線上にあるということである。

Figure 1 は、曲線 $z = W(y)$ を示している。これは、有限値 y_1（図示された場合）で値 B を持つか、あるいは、$y \to \infty$ で値 B に漸近的に収束するかのどちらかである。

与えられた不労所得 rc のいくらが貯蓄されるべきかを決定するために、我々は点 P、(rc, B)、を線 $z = B$ 上にとる。そこからその曲線への接線を引く（$z = B$ ではない、これはいつも 1 つの接線ではあるが、その他は違う）。もし Q の横座標（接触点）が y であれば、不労所得の量 y が消費されるべきであり、残り $rc - y$ は貯蓄されるべきである。もちろん y は負になり得る。これが意味することは、不労所得の全部が貯蓄されるばかりか、労働所得の一部もまた貯蓄されるということである。

いつもそうした接線がなくてはならないことを理解することは簡単である。なぜなら曲線 $z = W(y)$ は接線か漸近線 $y = -\eta$ を持つだろうからである。ここで、η は連続して存在することと適合した、消費にわたる収入の最大超過である。

この規則は、与えられた収入のいくらが消費されるかを決定するが、我々の収入が一定期間の後にどれほどになるかを教えない。これは方程式 (3) から得られる。これは今次式を与

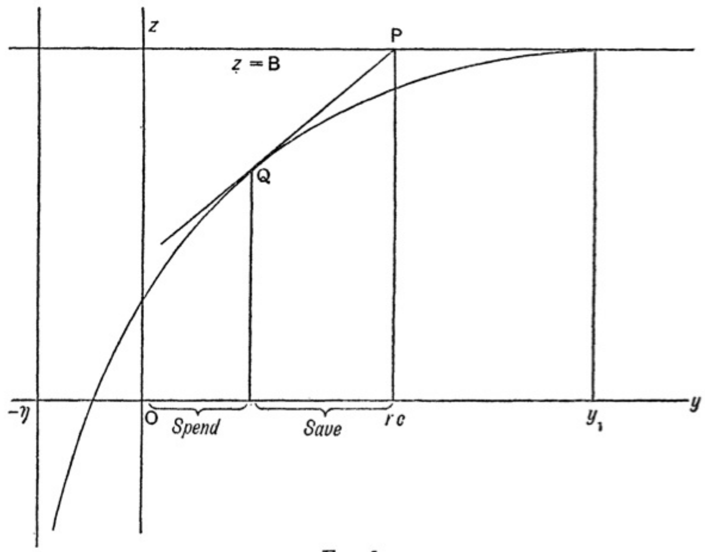

Fig. 1.

Figure 1. 曲線 $z = W(y)$、Q におけるその接線、漸近線 $y = -\eta$。ここで、Q の横座標 y は消費すべき不労所得を意味し、一方 $rc - y$ は貯蓄を意味する。

える：

$$\frac{d}{dt}w(y) = -rw(y)$$

あるいは

$$w(y) = Ae^{-rt}. \tag{7}$$

ここで、$A = w(y_0)$、y_0 は $t = 0$ における y の値である。

それから、我々が資本 c が初期の資本 c_0 から蓄積するのに要する時間を見い出したいのなら、我々は P を点 (rc, B) に取り、P_0 を (rc_0, B) にとる。$w(y)$ はその時 P からの接線の傾きであり、$w(y_0)$ は P_0 からの接線の傾きである。それゆえ、問題の時間は

$$= \frac{1}{r} \log_e \frac{w(y_0)}{w(y)} = \frac{1}{r} \log_e \frac{slope\ of\ tangent\ from\ P_0}{slope\ of\ tangent\ from\ P}.$$

2.2. **(b) 有限時間に生きる個人の場合.** さて、永久に生きる社会に関心を持つ代わりに、我々は個人に関心があるとしよう。この個人は有限時間（T 年とする）だけ生きる。我々はまだ方程式 (4)

$$f(a, c) - x = \frac{K - (U(x) - V(a))}{u(x)}$$

あるいは

$$rc - y = \frac{K - W(y)}{w(y)} \tag{8}$$

を持つ。しかし K はもはや B に等しくはないが、まだ決定することはできる。それを見いだすために、我々人間がいくらの資本を子孫に遺すのが必要だと感じるかを我々は知らなくてはならない；これを c_3 と呼ぼう。

方程式 (8) は、前と同様、y が (rc, K) あるいは P から曲線に引かれた接線の接点 Q の横座標と分かる。P はいつも $z = K$ の上にある。その横座標は rc_0 で始まり、rc_3 で終わる。我々は K を B より少ないものとする。というのは、有限時間だけ生きる人は無限時間生きる人より少ない貯蓄をするからである。結果として、$z = K$ は曲線に出会うだろう。そこを P_4 と呼ぶ。

P_0 と P_4 の両方から 2 本の接線が曲線上に引かれるだろう。我々が知る全てのために、2 つの接線の上方か下方のいずれかが y_0 と y_3 を決定するように取られる。しかしながら、Fig.2 におけるように $c_3 > c_0$ なら、我々は P_0 から下方の接線だけをとることができる。というのは、上方の接線は y_3 の値のいずれかより大きな y_0 の値を与えるからである。これは y が連続的に増加するに時は不可能となる。その時、Q_0 を P_0 からの下方の接線の接点ととると、我々が y_3 を下方値 Q_3 か上方値 Q_3' のいずれかを与えるようにとることに応じて、2 つの可能な場合がある。もし我々が Q_3 をとるなら、P_0 は P_3 までまっすぐに動く。そしてその間ずっと貯蓄がある；これは T は小さい時に起こる。しかし T が大きければ、Q_0 は Q_3' まで右に沿って動き、P_0 は最初 P_4 まで上昇しそれから P_3 まで下降する；始めのうちは貯蓄があ

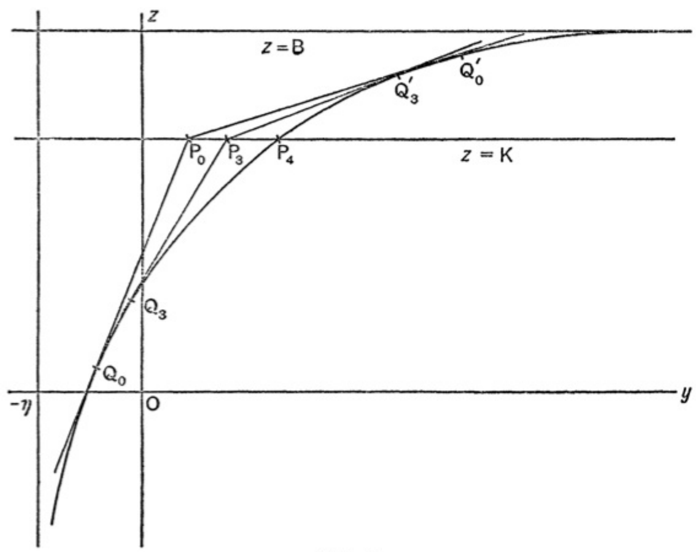

Fig. 2.

Figure 2. 曲線 $z = W(y)$ とその上への 2 つの接線。ここでは K は B より小さいと仮定している。P はいつも $z = K$ の上にあり、$P_0 = (rc_0, K)$、$P_3 = (rc_3, K)$。その曲線と $z = K$ の交点が P_4。P_0 と P_3 からその曲線上の接点がそれぞれ Q_0 と Q_3、その横座標がそれぞれ y_0 と y_3。

り、引き続き散財する。同様に、もし $c_0 > c_3$ なら、2 つの可能性がある。この場合、P_3 からの下方の接線をとることが出来ない。

どの接線をとるか、そしてまた K の値を決定するために、我々は方程式 (7) から導かれた条件

$$\frac{slope\ of\ tangent\ taken\ from\ P_0}{slope\ of\ tangent\ taken\ from\ P_3} = \frac{w(y_0)}{w(y_3)} = e^{rt}$$

を使わなくてはならない。

P_0 と P_3 の横座標が c_0 と c_3 であるという事実と、それらが同じ高さ K を持つという事実をいっしょにして、これは K と選ばれた接線の両方を定めれば十分である。

2.3. (c) 将来の効用や非効用が一定の割合で割り引かれる問題. さて、我々がもはや将来の効用や非効用を現在のものと等しいと推定できず、それらを一定の割合 ρ で割り引くという時に、我々の結果がどのように修正されるかを見なくてはならない。

将来の効用の割引率はもちろん将来の資金の総和の割引率から区別されなくてはならない。もし私が利息 r で貸し借りするなら、私は今は余分の $£1$ で満足し、１年では $£(1+r)$ で満足することになる。というのは、私はいつもそれを他のものと交換するからである。それゆえ、お金の限界割引率は r である必要がある。しかし効用の割引率は全く異なる。なぜなら私とってのお金の限界効用は時間が経つにつれて私が消費を増加させたり減少させることによって変化させることができるからである。

一定の割引率を仮定するということについて言えば、今我々が一個人や社会に関心があるから、割引率があらゆる個人に対して同じであることを私が意味したいのではなく、任意の将来の日時で享受の現在価値が割引率 ρ によって得られるべきであるということを意味したいのである。こうして、割引率を約 $\frac{3}{4}$ パーセントととると、任意の時間の効用は、混合率の場合には、１００年後のものの２倍望ましく、２００年後のものの４倍の価値がある、などなど、と見なされるだろう。これが、後に続く世代が同じ選好体系によって動機付けられるという仮説と矛盾すること無しに、我々がなすことの出来る唯一の仮定である。というのは、もし我々が変化する割引率 — 最初の５０年で高いとしよう — を持つのなら、 西暦２０００年における享受の選好／西暦２０５０年の選好は低い比率で計算されるが、西暦２０００年に生きている人々のものはもっと高いものということになるだろう。

最初に効用 ρ に対する割引率が利率 r より少ないと仮定しよう。

その時、式 (1) と (2) は変わらず、式 (3) は我々が今 $\frac{\partial f}{\partial c}$ が一定で r に等しいと仮定して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x) &= -u(x)\left(\frac{\partial f}{\partial c} - \rho\right) \\ &= -u(x)(r-\rho) \qquad (9) \end{aligned}$$

となる；結果として

$$(9a) \qquad w(y) = u(x) = Ae^{-(r-\rho)t}$$

そして

$$rc - y = \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = -(r-\rho)w\frac{dc}{dw}$$

それゆえ、

$$\frac{dc}{dw}+\frac{rc}{(r-\rho)w}=\frac{y}{(r-\rho)w},$$

ここで、

$$\begin{aligned} cw^{r/(r-\rho)} &= \int \frac{yw^{\rho/(r-\rho)}}{r-\rho}dw+\frac{K}{r} \\ &= \frac{1}{r}yw^{r/(r-\rho)}-\int_b^y w^{r/(r-\rho)}(y)dy+\frac{K}{r} \end{aligned}$$

（K、b は定数。）そして

$$\frac{dc}{dt}=rc-y=\frac{K-\int_b^y w^{r/(r-\rho)}(y)dy}{w^{r/(r-\rho)}(y)}. \tag{10}$$

この方程式は、$w(y)$ と $W(y)[=\int w(y)dy]$ の代わりに $w^{r/(r-\rho)}(y)$ と $\int w^{r/(r-\rho)}(y)dy$ としたことを除いて、(8) と同じものである。それゆえ、個人と社会の両方に対する解法は前と全く同じものである。ただし、我々が修正された効用と呼ぶもの（不労所得の現実の効用の代わりに、$r/(r-\rho)$ のべきをもつ限界効用を積分することによって得られる）を我々が考えなくてなくなるということを除いてだが。これは、限界効用の減少を加速し、高収入の相対的な重要性を少なくするという効果を持つ。このようにして、我々は未来を割引くことを高収入を割引割り引くことに翻訳することができる。これが行われる比率は、単に ρ と r の比によって支配されるので、もし ρ がゼロなら、それは r の値（もしこれがゼロでなければ）には無関係である。こうしてセクション I の結論が確かめられる。

しかしながら、ちょっとした難しさがある。なぜなら、もし我々が無限時間を考えているのなら、定数 K が "修正された至福 "(すなわち、$\int_b^y w^{r/(r-\rho)}(y)dy$ の最大値）と呼ばれるにべきものと解釈すべきであるいうことをまだ実際に示していはいないからである。この修正された至福は、至福が要するのと同じ所得を要するだろう。その修正は単に至福の価値におけるものである。しかしながら、この結果は至福に達するまで y が増大することを示す方程式 (9a) からただちに導き出されるので、$\frac{dc}{dt}$ は決して負になり得ず、K は修正された至福より少なくはなり得ない。その一方で、この条件が満足されると仮定されると、9(a) は初期に y が大きくなればなるほど、A がますます小さくなり、y が将来の時間を通じてますます大きくなるということを示す。ここに、K はできる限り小さくなくてはならない（もしそれが $\frac{dc}{dt}$ を永遠に負にするほどは小さくないと仮定するなら）; だから、K は修正された至福より大きくなり得ない。それゆえ、それが小さくも大きくもないので、それは等しくなくてはならない。

興味深い特別な場合は以下の関係を持つ社会の場合である：

$$w(y)=Dy^{-\alpha}\quad(\alpha>0),$$

この時、我々は次の関係を持つだろう：

$$w^{r/(r-\rho)}(y) = Ey^{\beta},\ \beta = \frac{r\alpha}{r-\rho},\ E = D^{r/(r-\rho)},$$

$$savings = \frac{K - \int w^{r/(r-\rho)}(y)dy}{w^{r/(r-\rho)}(y)dy} = \frac{K - K_1 + \frac{Ey^{1-\beta}}{\beta-1}}{Ey^{-\beta}}.$$

$K = B$ に対応して、$\rho = 0$ の場合には我々はここに

$$K = K_1$$

と

$$savings = \frac{y}{\beta - 1}$$

すなわち、不労所得の一定の割合 $\frac{r-\rho}{r(\alpha-1)+\rho}$ が貯蓄されるべきである。これはもし $\rho = 0$ なら、$\frac{1}{\alpha-1}$ であり、r に依存しない。

もし利率が効用の割引率より少なければ、我々は全く異なる結果を導く類似の方程式を持つだろう。消費の限界効用は $r - \rho$ の比率で上昇すし、消費はすっからかんの必要最低限の生活水準にむけて落ち込むだろう。その段階では、もし我々が自殺の可能性に注意を払わないのなら、限界効用は無限に取ることができる。この過程の間、すべての資本は消費され、信用が得られる程度まで負債を被るだろう。この点に関する最も簡単な仮定は、その利息を支払った後で生き続けることが可能であるように、ある総額を借りることが可能であるだろうというものである。

3. 利率の決定

次に利率を決定する問題を考えよう。

3.1. (α) **一定の割引率の場合.** まず最初に、我々はだれもが将来の効用を彼／彼女のために同じ割引率 ρ で割り引くと仮定するつもりである。

その時、平衡状態において、貯蓄はなくなるだろう。そして

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0,$$

であるので、我々は

$$x = f(a, c),$$
$$v(a) = \frac{\partial f}{\partial c} u(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \rho;$$

という、x、a、c を決定する 3 つの方程式を持つ。

最後の式は、資本の限界生産性 $\frac{\partial f}{\partial c}$ によって決定される利率は割引率 ρ に等しくなくてはならないということを言っている。[5]

しかし与えられた時（例えば現在）に、$\frac{\partial f}{\partial c} > \rho$ であると仮定しよう。その時、平衡ではないだろうから、貯蓄があるだろう。短期間では大きな取引は貯蓄できないので、平衡が達成するまで数世紀かかるだろう。あるいは決して達成されないかもしれない。しかし単に漸近的に到達するだけである；そしてその間にどのように利率が決定されるかという問題が生じる。なぜならそれは供給と需要の通常の平衡状態では決定されないからである。

難しいことは、利率は総資本に対しては需要額として機能するが、資本額に対してではなく貯蓄率に対しては供給金額として機能するということである。結果としての問題の状態は Fig.3 に表現されている。この中では、しかしながら、総労働額の変化は無視されている。これは、資本に対する需要曲線 $r = \frac{\partial f}{\partial c}$、極限の供給曲線 $r = \rho$、そして当面の供給曲線 $c = c_0$ を示している。明らかなことは、利率は需要曲線の当面の供給曲線 $c = c_0$ との交点によって直接に決まるということである。究極の供給曲線 $r = \rho$ は、c_0 が窮極値 OM に接近する比率を支配するようにして生じるということである。ここで OM とは粗くいえば PM と QN の比に依存する利率のことである。それゆえ、我々は利率が最初に需要金額によって支配され、究極的には援助を誘発するために必要な報酬を大きく超えることができる。

同様に、社会主義状態の会計学においては、利率の機能は存在する資本の最も賢い使用法を保証するようにすべきであり、決して貯蓄すべき収入の割合への案内として直接の方法で提供するべきではない。

3.2. (β) **異なる人々の将来の異なる効用の場合.** さて我々は、異なる人々が将来の効用を異なる比率で割り引くという事実や、時間因子は別として、彼ら自身より彼らの子孫にはそんなに関心が無いという事実を幾分考慮するように試みなくてはならない。

次のように仮定してみよう：人々は自分の子孫に全く関心がない；各人は人口を維持のために必要である子供たちを世話するための分け前には責任があるが、労働人生は資本を全く持たずに出発し、貯金を年金に使い果たして何も遺さず人生を終える；一生のうちに各人は消費のための一定の効用の計画を立て、一定の割合で将来の効用を割引く。しかしこの割合は異なる人々では異なると仮定される。

そんな社会が平衡状態にある時、もちろん利率は資本の需要額 $\frac{\partial f}{\partial c}$ に等しくなくてはならない。そしてそれはまた ”供給額 ”と等しくなるだろう。これは次のようにして生じる。利率が一定で r に等しく、与えられた個人に対する割引率が ρ であると仮定しよう。その時、もし $r > \rho$ なら、彼は若い時に貯蓄するだろう。というのは、老後の収益力の損失に対して備えるためにばかりではなく、今先行して消費するお金に対して、後の日時で消費のためのお金をもっと多く得ることができるからである。もし我々が収益力の変化を無視するのなら、彼の行動は、IIb におけるように、IIc の方程式を有限の寿命に適用するように修正することによって計算できる。彼はある時間資本を蓄積し、死ぬ前にそれを使い果たすだろう。この人の他に、我々は我々の社会には他の人間（異なる時間に生まれたということを別にすれば、ちょうど彼と同じような人間たち）もいると仮定しなくてはならない。寿命の期間を通じて

[5] しかしながら、平衡はまた $\rho < \frac{\partial f}{\partial c}$ を持つ至福か $\rho > \frac{\partial f}{\partial c}$ を持つ必要最低限の生活のいずれかで得られる。

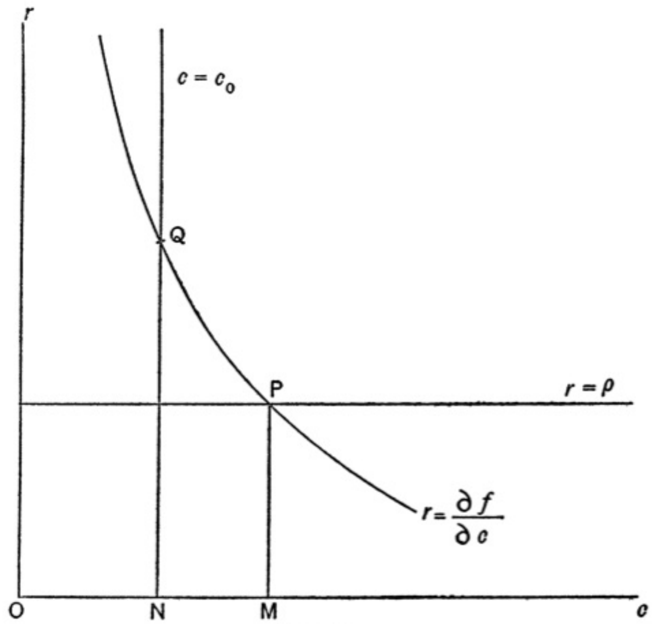

Fig. 3.

Figure 3. 利率 r と総資本 c の関係。ここではそれぞれ、資本に対する需要曲線 $r = \frac{\partial f}{\partial c}$、極限の供給曲線 $r = \rho$、当面の供給曲線 $c = c_0$ を示す。

誕生日が均等に広がっている、この種の n 人によって所有される資本は、一生の人生の中で各人によって所有される平均的資本の n 倍であるだろう。それゆえ、この種の人々の階級は、利率に依存する一定資本を所有するだろう。そしてこれはその金額で彼らによって供給される資本量であるだろう。（もし $\rho > r$ なら、若い時お金を借り、年とって払い戻すというように、それは負である。）その時、我々は、どの階級の個人によって与えられた価格で提供される供給と一緒に加えることにより、資本の全供給曲線を得ることができる。

それから、もし我々が人類の子孫への関心を無視するのなら、資本は需要価格に等しくなるように定まった供給価格を持つということが分かる。この供給価格は効用に対する人々の割引率に依存する。そしてそれは、割引率が利率に等しい人は貯蓄も借金もしないだろう（老人に提供することを除き）という意味において、”限界貯蓄者 ”の割引率に等しくすることが出来る。

しかしその状況は以下の点で通常の供給問題とは異なる：この ”限界 ”を超える人々は単に何も提供しないのではなく、むしろ負の供給を与える。これは、将来の所得に対して若い時に借金して、おおむね負債になるものである。

3.3. (γ) 家族間で異なる割引率の場合. さて、人ないし社会が永遠に生き、一定の割合で将来の効用が割り引かれると仮定して (α) の場合に戻ろう。しかし今度は家族から家族への割引率の変化を考慮してみよう。

簡単のため、総労働額は一定であるので、国の全収入は資本 c だけの関数 $f(c)$ であると見なすことが出来ると仮定しよう。利率は $f'(c)$ となる。また、どの個人も有限の収入 x_1 を得て、考えられうる最大の効用を達成すると仮定しよう。そして、x_2 より低いお金ではだれも生活できないと仮定しよう。

さて、平衡[6]が資本 c、収入 $f(c)$、利率 $f'(c)$ あるいは r で達成されると仮定しよう。その時、それらの家庭（その数を $m(r)$ と言おう、この家庭の割引率は r より少ない）は至福に到達したに違いないか、あるいは、彼らは方程式 9(a) に従って彼らの消費をまだ増大させているところだろう。結果として、彼らは彼らの間で収入 $m(r)\cdot x_1$ を得る。他の家庭は、数において $n-m(r)$（ここで n は家族の総数である）、は最低限の生活レベルにまで落ちなくてはならない。あるいは、彼らはまだ消費を減少させているだろう。結果として、彼らは彼らの間で全収入 $\{n-m(r)\}x_2$ を得る。ここに

$$\begin{aligned} f(c) &= m(r)x_1 + \{n-m(r)\}x_2 \\ &= n\cdot x_2 + m(r)\{x_1 - x_2\}, \end{aligned}$$

これは、$r=f'(c)$ といっしょに、r と c を決定する。$m(r)$ は r の増加関数であるので、r vs $f(c)$ のグラフを描くことによって、２つの方程式が一般に唯一の解を持つということが簡単に分かる。[7]

それゆえ、そのような場合には、平衡状態は、社会が、至福を享受する繁栄（貯蓄家）と最低レベルの生活のその日暮らし（浪費家）という、２つの階級に分離することにより達成できるだろう。

F. P. ラムゼイ

King's College, Cambridge.

[6]我々は各家庭が平衡にあると仮定する。これはその状態が維持される唯一の方法である。というのは、それ以外では、ある家庭の貯蓄はどの瞬間にも他の家庭からの借金とバランスするにちがいないのだけれども、それらの家庭は特別な事故の場合を除き、そうすることを続けることが出来ないからである。

[7]ここでは我々は ρ が r に厳密に等しいという無視できる数の家族を無視した。