

## 物理的な力線について

J. C. マックスウェル  
ロンドン、キングズカレッジの自然哲学教授



---

*Date:* last revised on 18 Mar. 2012. translated to Japanese by Kazumoto Iguchi.

Original papers: Received March 27, 1861.

James Clerk Maxwell "On Physical Lines of Force. Part I. — The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena", London, Edinburgh and Dublin, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, March (1861) pp. 161 – 175.

J. C. Maxwell, "On Physical Lines of Force. Part II. — The Theory of Molecular Vortices applied to Electric Currents", *Philosophical Magazine*, S. 4, Vol. 21, No. 140, April (1861) pp. 281 – 291.

J. C. Maxwell, "On Physical Lines of Force. Part II. — The Theory of Molecular Vortices applied to Electric Currents", *Philosophical Magazine*, S. 4, Vol. 21, No. 140, April (1861) pp. 338 – 348.

J. C. Maxwell, "On Physical Lines of Force. Part III. — The Theory of Molecular Vortices applied to Statical Electricity", *Philosophical Magazine*, April and May (1861) pp. 12 – 24.

J. C. Maxwell, "On Physical Lines of Force. Part IV. — The Theory of Molecular Vortices applied to Action of Magnetism on Polarized Light", *Philosophical Magazine*, April and May (1861) pp. 85 – 95.

## 1. 第1部。 — 磁気現象に応用された分子渦の理論

引力と斥力あるいは物体の位置に依存する任意の力を含むあらゆる現象において、我々は与えられた物体がある与えられた場所に置かれているなら、その物体に作用するはずの力の「大きさ」と「方向」を決定しなくてはならない。

球の重力が作用した物体の場合では、この力は距離の逆2乗であり、球の中心に対して直線上にある。2つの引き合う球ないしは球でない物体の場合には、力の大きさと方向はもっと複雑な法則に従って変化する。電磁気現象の場合では、任意の点に働く合力の大きさと方向は研究の中心的主題である。任意の点に働く力の方向が分かっていると仮定しよう。その時、もし我々が1本の線をそのコースのどの部分においてもその点に働く力の向きと一致するように引くのであれば、この線を「力線」と呼ぶことが出来る。なぜなら、それがそのコースのあらゆる部分の力の向きを示しているからである。

ある十分な数の力線を描くことによって、我々は力が作用する空間のあらゆる部分における力の向きを示すことが出来る。

こうしても我々が1つの磁石の近くの紙の上に鉄屑を撒いたとすれば、各の屑は誘導で磁化するだろう。そして、連続した屑がそれらの反対極で線を形成するように一体化するだろう。そして、これらの鉄屑が力線の向きを「示す」だろう。この実験によって得られた磁力の存在の美しい例証は、作用の座が離れた所にあり、磁石が場のその部分に置かれるまではそこには何も存在しない力線を、何か現実のもの、2つの力の単なる結果以上の何かを示しているもののように自然に考えるようになる。我々は、現象がその仮説に厳密に一致しているということに我々が満足したとしても、磁極に向う引力や斥力の仮説に基づいた説明には満足しない。そして、我々がこれらの力線を見いだすあらゆる場所においてある物理的状態または物理的作用が実際の現象を引き起こすに足る十分なエネルギーで現われなくてはならないということを我々が考える助けにならないのである。

この論文における私の目的は、この方向への推測の道筋を、媒質中の張力と運動の状態の力学的結果を調べ、これらを磁気と電気の観測された現象と比較することによって、明確にすることである。そのような仮説の力学的帰結を指摘することによって、私は現象を媒質の作用によるものと考え、しかし、一般的に他の仮説の言葉で表現されて来たすでに確立された実験法則に対する、この仮説の關係に疑いを持つ人へ役にたきたいと望むのである。

私は前の論文<sup>1</sup>において幾何学者の精神の前で、力線とそれに辿られる空間の關係の明確な概念づけを行った。流体内の流れの概念を使って、私はどのように力線を描くべきかを示した。力線は力の量を数によって示すべきであるので、各線は単位力線と呼ばれた（ファラデー (Faraday) の'Researches', 3122を見よ); そして、私は力線が1つの媒質から別の媒質に通るところの線の経路を研究した。

その同じ論文において、私は「電気緊張状態 (Electrotonic State)」の幾何学的意義を見いだした。そして、想像力を助けるためだが現象を説明するためではない数学的例示を使うことによって、電気緊張状態、磁気、電流、そして起電力の数学的関係を引き出す方法を見いだした。

さて、私は磁気現象を力学的観点から調べることに、ある媒質内の張力、または、ある媒質の運動が観測された力学現象を何が生み出すことができるのかを決定することを提案したい。もし、同じ仮説によって、我々が磁気引力の現象を電磁現象や誘起電流現象と関係づけることができるのであれば、我々は1つの理論を見いだしたことになるだろう。もしそれが

<sup>1</sup>論文 "On Faraday's Lines of Force", Cambridge Philosophical Transactions, vol. x. part 1. を見よ。

真実でなければ、この部分の物理学の我々の知識を大きく広げるだろう実験により誤りと証明されるだけのことである。

磁気の影響下にある媒質の力学的条件は、流れ (currents)、波動 (undulations)、あるいは、変位 (displacement) または歪み (strain) の状態、あるいは、圧力 (pressure) または応力 (stress) の状態などのように、さまざまに考えられて来た。

磁石の北極から始まり南極に入る、あるいは、電流の周りを循環する、流れは、もし我々が引力の現象あるいは電流それ自体に対する力学的原理を説明したり、あるいはそれらの存在を説明することが出来たのであれば、力線の幾何学的配置を正しく表す利点がある。

中心から出発する波動は、チャリス (Challis) 教授の計算によれば、中心方向へ引力に似た効果を生み出す；しかしこれが真実であると認めると、我々は、同じ空間を進む波動の2つの系列は2つの引力がするように結果として1つに結びつくのではなく、強度と同様、「位相」の関係に依存する効果を生じ、そして、もし続けられれば、それらはどんな相互作用もなくお互いに発散する。実際、引力の数学的法則は波動の引力とは少しも似ていない。その一方で、それらは流れ、熱と電気の伝導、弾性物体の数学的法則に極めて類似のものである。

1847年1月のケンブリッジとダブリンの数学雑誌 (the Cambridge and Dublin Mathematical Journal) において、ウィリアム・トムソン (William Thomson) 教授は、歪み状態にある弾性固体の粒子の変位によって、“電気、磁気、直流電気 (Galvanic) 力の力学的表現”を与えた。この表現において、我々は、固体のあらゆる点で角度変位を磁場の対応する点に働く磁力に比例させなければならない。変位の回転軸の方向は磁力の向きに対応する。その時、任意の粒子の絶対変位は、大きさと向きにおいて、私が電気緊張状態と同一視したものと対応する；そして、任意の粒子の相対変位は、すぐ近くの粒子を参照して考えると、大きさと方向が電磁場の対応する点を通る電流量に対応するだろう。この表現法の著者は、弾性体内のこれらの歪みによる効果によって観察された力の原因を説明することを試みるのではなく、2つの問題の数学的類似を両方の研究で想像力を助けるために使うのである。

さて、我々は磁気的影響を媒質中のある種の圧力または張力、あるいは、もっと一般に応力の形式に現われると考える番に来た。

応力は物体の構成部の間の作用と反作用であり、一般的に媒質の同じ点で異なる方向に異なる圧力または張力からなる。

これらの力の間に必要な関係は、数学者によって研究されて来た；そして、応力の最も一般的なタイプは主な3つの圧力または応力の互いに垂直な方向への組み合わせからなることが示された。

主たる圧力の2つが等しい時、3つ目は軸対称になり、最大圧力が最小圧力のいずれかになる。そして、この軸に直角の圧力はすべて等しくなる。

3つの主圧力がすべて等しい時、圧力はどの方向も等しくなり、我々が簡単な静水力学的圧力で例を持つ、明確な方向軸を持たない応力の結果となる。

応力の一般的なタイプは磁力の表現としては適切ではない。なぜなら、磁力線は方向と強さを持つが、線の「側面」の間でなんらかの差を示す第3の量を持たないからである。これは、偏光<sup>2</sup>の場合に観測されたことに類似であるだろう。

それゆえ、我々は一点に働く磁力を最大または最小圧力の単一軸を持つ応力によって表さなくてはならない。そして、この軸に直角のすべての圧力は等しい。本質的に双極子的である力線を、必然的に等方的である応力の軸によって表すことは一貫性がないと反対された；

<sup>2</sup>ファラデー (Faraday) の'Researches', 3252. を見よ。

しかし、我々は作用反作用のあらゆる現象はその「結果」において等方的であることを知っている。なぜなら、力が働く物体間の力の効果は等しくかつ反対である一方、力の本質や原因は南極と北極の間の引力におけるように双極子的であるからである。

次に軸対称な応力の状態の力学的効果を考えよう。我々はそれを、多くの場合、軸に沿う簡単な圧力または張力と結合した、単純な静水力学的圧力に分解する。軸が最大圧力軸である時、軸に沿った力は圧力であるだろう。軸が最小圧力軸である時、軸に沿った力は張力であるだろう。

もし我々が2つの磁石の間の力線を観測するなら、鉄屑によって示されるように、我々は力線が1つの極から他の極へ移るときはいつでも、これらの極の間で「引力」があるだろう；そして、両極からの力線がお互いに避け合い、空間に分散されるところで、両極はお互いに反発するので、両方の場合に、それらは力線の合力の方向に描かれる。

それゆえ、磁力線の軸方向の応力は、ロープのような、「張力」であることが明らかになる。

もし我々が2つの重力物体の近傍における力線を計算するのなら、我々は同じ名前の2つの磁極の近くの力線のように、それらを同じ方向に見いだすだろう；しかし、我々は力学的効果は斥力の代わりに引力であることを知っている。この場合における力線は物体間を走るのではなく、お互いに避け合い、空間に分散する。引力の効果を生み出すためには、重力の線に沿う応力は「圧力」でなくてはならない。

さて、磁気現象が、静水力学的圧力と結合して、力線の方向の張力の存在に依存するとしよう；あるいは、言い換えれば、圧力は軸方向より赤道方向に大きい；次の質問は、どんな力学的説明を我々が流体中または運動媒質中の圧力のこの不等式を与えることが出来るか？である。もっとも簡単に想起される説明は、赤道方向にある圧力の余剰は、力線に平行な方向のそれらの軸を持つ媒質中の渦または渦巻きの遠心力から生じるということである。

圧力の不等式の原因の説明はただちに力線の双極子的性質を表す手段を示す。あらゆる渦は本質的に双極子的である。その軸の両端は、それらの点から観察されよう、回転方向によって区別される。

また我々は電気が導体内を循環する時、それが回路を通る磁力線を生じることを知っている。その線の方向は循環の方向に依存している。我々の渦の回転方向は正の電気が、回路内の方向が与えられた力線のものと同じである力線を生じるように回転するとしよう。

今我々は場中の任意の一部におけるすべての渦が軸にほとんど平行に同じ方向に回転していると仮定しよう。しかし、場の一部から別のところに移動すると、渦の、軸方向、回転速度、そして媒質密度が変化しやすいと仮定しよう。我々は媒質の要素への力学的効果を研究するだろう。そして、この結果の数学的表現から、我々は異なる成分部分の物理的特徴を引き出すつもりである。

1.1. 命題 I. — もし幾何学的に似ている2つの流体系の中で、対応する位置で速度と密度が比例しているなら、運動により対応点に働く圧力差は、速度の2乗比と密度の1乗比で変化するだろう。

$l$  を線形次元の比、 $m$  を速度比、 $n$  を密度比、 $p$  を運動による圧力比としよう。その時、対応する位置の質量比は  $l^3 n$  となり、系の同じ部分を進むことで得られた速度の比は  $m$  となるだろう；だから、 $l^3 m n$  はそれらの経路の同じ部分を進む中で類似の部分によって得られた運動量の比である。

表面の比は  $l^2$ 、それらに作用する力の比は  $l^2 p$ 、そしてそれらが作用する間の時間の比は  $\frac{l}{m}$  である；それゆえ、力積の比は  $\frac{l^3 p}{m}$ 、そして我々は今

$$l^3 mn = \frac{l^3 p}{m},$$

あるいは

$$m^2 n = p$$

を得る；すなわち、運動による圧力比 ( $p$ ) は密度比 ( $n$ ) と速度の 2 乗比 ( $m^2$ ) からなり、運動系の線形次元には依存しない。

一様な角速度で回転する円形渦の場合、もし軸に働く圧力が  $p_0$  であれば、円周に働く圧力は  $p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$  であるだろう、ここで  $\rho$  は密度であり、 $v$  は円周での速度である。軸に平行な「平均圧力」は、

$$p_0 + \frac{1}{4}\rho v^2 = p_2$$

となるだろう。

もしたくさんのそういう渦がそれらの軸に平行に並んでいっしょに置かれた場合、それらは 1 つの媒質を形成するだろう。その中では軸に平行な圧力  $p_2$  であり、垂直方向には  $p_1$  の圧力があるだろう。もし渦が円形であれば、そして全体を通じて一様な角速度と密度を持つのなら、

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\rho v^2$$

となる。もし渦が円形でなく、そして角速度と密度が一様でなければ、しかしすべての渦に対して同じ法則に従って変化するのなら、

$$p_1 - p_2 = C\rho v^2,$$

ここで、 $\rho$  は平均密度、 $C$  は渦中の角速度と密度の分布に依存する数値量である。将来、我々は  $C\rho$  の代わりに  $\frac{\mu}{4\pi}$  を使うので、

$$(1) \quad p_1 - p_2 = \frac{\mu}{4\pi} v^2,$$

となる。ここで、 $\mu$  は密度に対して一定の比を表す量であり、 $v$  は各渦の周囲の線形速度である。

軸に平行な分子渦で満たされた、この種の媒質は、異なる方向に異なる圧力を持つ点で通常の流体とは異なっている。もし適切に配列された圧力によって妨げられないのなら、横に広がろうとするだろう。そうすることで、各々の渦の直径が広がり、その速度を同じ割合で減少させるだろう。これらの圧力の不一致を持つ媒質が平衡になるべきであるためには、ある条件が満足されなくてはならない。これを我々は研究しなくてはならない。

1.2. 命題 II. — もし  $x, y, z$  軸に関する速度軸の方向余弦を  $l, m, n$  である場合、座標平面上の垂直と接線の応力を見いだすこと。

実際の応力はすべての方向で働く単純な静水学的圧力  $p_1$  に、そして応力軸に沿って作用する、単純な張力  $p_1 - p_2$  あるいは  $\frac{1}{4\pi}\mu v^2$  に分解されていくのかもしれない。

それゆえ、もし  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$  が3つの軸に平行な垂直応力であれば、それらはそれらの軸を増大させる傾向のある時に正と考えられるが；そしてもし  $p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$  が3つの座標編面内の接線応力であれば、これらは添字のシンボルを同時に増大させる時に正と考えられるが、その時、応力分解<sup>3</sup>によって、

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 l^2 - p_1$$

$$p_{yy} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 m^2 - p_1$$

$$p_{zz} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 n^2 - p_1$$

$$p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 mn$$

$$p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 nl$$

$$p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 lm$$

となる。もし我々が

$$\alpha = vl, \quad \beta = vm, \quad \gamma = vn,$$

と書けば、その時、

$$(2) \quad \begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu\alpha^2 - p_1 & p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu\beta\gamma, \\ p_{yy} = \frac{1}{4\pi}\mu\beta^2 - p_1 & p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu\gamma\alpha, \\ p_{zz} = \frac{1}{4\pi}\mu\gamma^2 - p_1 & p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mu\alpha\beta. \end{cases}$$

1.3. 命題 III. — 内部応力の変化から生じる、媒質の要素に作用する合力を見いだすこと。

我々は一般的に、応力平衡の法則<sup>4</sup>によって、単位体積あたりの  $x$  方向における力に対して、

$$(3) \quad X = \frac{d}{dx}p_{xx} + \frac{d}{dy}p_{yy} + \frac{d}{dz}p_{zz}$$

<sup>3</sup>ランキン (Rankine) の 'Applied Mechanics', art. 106.

<sup>4</sup>ランキン (Rankine) の 'Applied Mechanics', art. 116.

を得る。この場合では、その表式は

$$(4) \quad X = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d(\mu\alpha)}{dx} \alpha + \mu\alpha \frac{d\alpha}{dx} - 4\pi \frac{dp_1}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dx} \alpha + \mu\beta \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dx} \alpha + \mu\gamma \frac{d\alpha}{dz} \right\}$$

と書くことができる。 $\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dx} + \gamma \frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ であることを思いだすと、これは

$$X = \alpha \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{dx} (\mu\alpha) + \frac{d}{dx} (\mu\beta) + \frac{d}{dx} (\mu\gamma) \right) + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{d}{dx} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \mu\beta \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) + \mu\gamma \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \frac{dp_1}{dx}$$

となる。 $y$  軸と  $z$  軸に平行な力に対する表式は類推から書き下すことが出来る。

さて、我々はこの表式の各項の意味を解釈しなくてはならない。

我々は  $\alpha, \beta, \gamma$  を単位磁石の北を指す端に作用するだろう力の成分であると仮定する。

$\mu$  は空気を 1 つの標準として参照した任意の点での媒質の磁気誘導容量を表す。 $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$  はそれぞれ  $x, y, z$  の 3 軸に垂直な単位面を通る磁気誘導量である。

1 つの磁石の極を取り巻く閉曲面を通る磁気誘導の総量は、完全にその極の強度に依存する；それゆえ、もし  $dx dy dz$  が体積要素であれば、

$$(6) \quad \left( \frac{d}{dx} \mu\alpha + \frac{d}{dy} \mu\beta + \frac{d}{dz} \mu\gamma \right) dx dy dz, = 4\pi m dx dy dz,$$

これは、左辺が、体積要素  $dx dy dz$  の面を外に向って通る磁気誘導の総量を表し、右辺が、北を指す種類の、体積要素内の "仮想的磁性体" の量を表す。

それゆえ、 $X$  の値の「第 1 項」

$$(7) \quad \alpha \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{dx} \mu\alpha + \frac{d}{dy} \mu\beta + \frac{d}{dz} \mu\gamma \right),$$

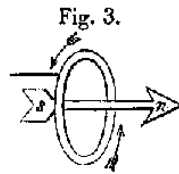
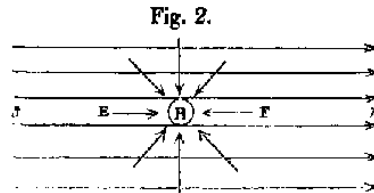
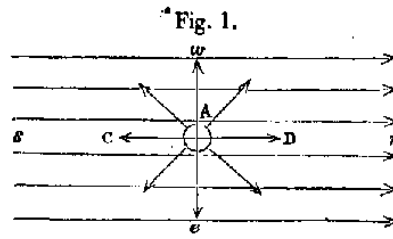
は

$$(8) \quad \alpha m,$$

と書かれる。ここで  $\alpha$  は磁力の強度であり、 $m$  は単位体積内の北を指す磁性体の量である。

この項の物理的解釈は、 $x$  の正の方向に北極を押す力はその方向へ分解された磁力強度と磁石の北極の強度との積であるということである。

図 1 の左から右への平行線は、 $s n$  が南から北の方向である地球の磁力場 (field of magnetic force) のような磁力場を表す。我々の仮説に従うと、渦は、図 3 の矢印で示される方向にあるだろう。すなわち、力線に垂直な面にあり、 $s$  (南) の方向から  $n$  (北) に向って見るよう



に観察された時、時計回りの方向に回転する。紙面の上の渦の部分は  $e$  (東) に向って動き、紙面の下の部分は  $w$  (西) に向って動くだろう。

我々は、渦を時計回りの方向に回転するように見るために、いつも矢印の頭で方向を印すつもりである。その時、矢印の頭は、磁場 (magnetic field) の「北向き」の方向を示す、すなわち、北を指し示す磁石の端が場中で自身を置くはずの方向である。

さて、 $A$  を磁石の北を指す端としよう。それは他の磁石の北極と反発し合うので、力線は  $A$  「から」外のあらゆる方向に向うだろう。北側では線  $AD$  は磁場の線と同じ方向にあり、渦の速度が「増加させられる」だろう。南側では、線  $AC$  は反対方向にあり、渦の速度は減少させられるだろう。それゆえ、力線は  $A$  の南側より北側でもっと強くなる。

我々は渦の力学的効果はそれらの軸に沿った張力を生じることを見て来たので、 $A$  への合力の効果は  $C$  の方向へより  $D$  の方向へより強く引っ張るだろう；すなわち、 $A$  は北へ動く傾向があるだろう。

図 2 の  $B$  は南極を示すとしよう。 $B$  に属する力線は  $B$  の「方向へ」向かう傾向があるだろう。そして、我々は力線は  $F$  の方向へより  $E$  の方向へより強くなることを見いだすだろう。だから、この場合の効果は南に向って  $B$  を押すことである。

それゆえ、分子渦の仮説では、我々の第 1 項は磁場中の北極または南極に作用する力の力学的説明を与えるということが明白となる。

さて第 2 項

$$\frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

を調べることが試みよう。

ここで、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  は場の任意の部分での強度の 2 乗であり、 $\mu$  は同じ平面での磁気誘導容量である。それゆえ、場に置かれた任意の物体は、一部はそれ自身の磁気誘導容量に依存し、一部は強度の 2 乗の増加率に依存する力で「より強い磁気強度の平面方向へ」押されるだろう。

もし物体が流体媒質中に置かれたら、媒質は物体同様により大きな強度の面の方向に押されるだろう。だから、静水力学的圧力はその方向へ増加するだろう。結果として媒質中に置かれた物体へ働く効果は、物体への作用とそれが変位する媒質の割合への作用の差であるだろう。それゆえ、物体は、周りの媒質より大きなまたは小さな磁気誘導容量を持つように、より最大の磁気強度の面の方向へ進むか、またはその面の方向から出るという傾向があるだろう。

Fig. 4.

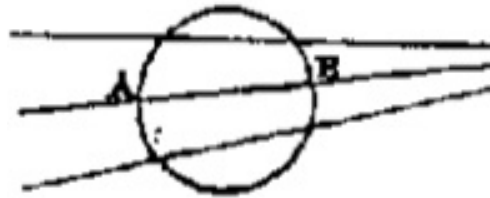
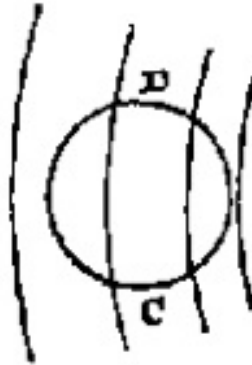


図4で、力線は右方向に収束し、より強くなるように描かれている。それゆえ、 $B$  に働く磁気張力は  $A$  よりもっと強くなる。そして、物体  $AB$  は右に押されるだろう。もし磁気誘導容量が周りの媒質中より物体内の方が大きければ、それは右へ動くが、もし小さければ、左へ動くだろう。

この場合に、我々は力線は北または南の磁極に右側に収束して行くと仮定することが出来る。

図5では、力線は垂直に描かれていて、右側により込み入っている。もし力が右側に増加するなら、力線は右側に曲がるだろうということが示されている。その時、磁気張力の効果

Fig. 5.



は任意の物体を周りの媒質のものを超えた磁気誘導容量の余剰に依存する力で右へ引き寄せることであるだろう。

この図で力線は紙面に垂直で右側にある電流を取り巻く磁力線であると仮定してよい。

これら2つの例は、力の増加が線に沿って起こるかまたは線に垂直に起こるかどうかで、磁力の変化する場の中に置かれた常磁性体または反磁性体への力学的効果を示すだろう。我々の方程式の第2項の形は一般法則を示す。これはまったく力線の方法には無関係であり、単に力が場の一部からもう一部で「変化する」仕方に依存する。

さて、我々は  $X$  の値の第3項

$$-\mu\beta \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right)$$

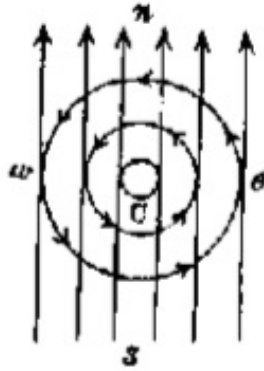
に向う。ここで、 $\mu\beta$  は、以前のように、 $y$  軸に垂直な単位面積を通る磁気誘導量である。そして、 $\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$  は、もし  $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$  が完全微分であったとしたら、すなわち、もし単位北極に作用する力が任意の閉曲面を通るには仕事が為されないという条件に左右されるのなら、消滅するだろう。その量は  $xy$  平面に平行に  $+x$  から  $+y$  の方向に単位面積の周りを進む時に北極に作用する力である。さて、もし強さ  $r$  の電流が  $z$  方向（我々は点が垂直に上方へ上がると仮定する）へ流れるとき、それからもし  $x$  軸が東で、 $y$  軸が北であるなら、単位北極は  $x$  から  $y$  の向きに  $z$  軸の周りを押されるだろう。それゆえ、1回転で仕事は  $= 4\pi r$  が為されるだろう。ゆえに、 $\frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right)$  は「単位面を通る  $z$  に平行な電流の強度」を表す；そしてもし我々が

$$(9) \quad \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) = p, \quad \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) = q, \quad \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) = r,$$

と書くなら、 $p, q, r$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸に垂直な単位面積あたりの電流量である。

$X$  の第3項、 $-\mu\beta r$  の物理的解釈は、もし  $\mu\beta$  が  $y$  に平行な磁気誘導量であり、 $r$  が  $z$  方向に流れる電流であるなら、要素は電流と磁力線の方に垂直に、 $-x$  の方向に押されるだろう；すなわち、北に向かって磁化された力の場で増加する電流は「西」に動こうとするだろう。

Fig. 6.



分子渦の作用を図示するために、 $sn$  を場中の磁力の方向とし、そして、 $C$  を紙面に垂直な増大する磁気流の断面としよう。この流れによる力線は時計回りの方向とは反対に描かれた円であるだろう；すなわち、 $n w s e$  の向きである。 $e$  で力線は場と流れの力線の和であるだろう。そして、 $w$  でそれらは2つの線の集合の差であるだろう；それゆえ、流れの東側の渦は西側の渦よりもっと強くなるだろう。渦の両方の集合は赤道部分を  $C$  の方向へ向きを変えさせるので、それらは  $C$  の方向に伸びようとするだろう。しかし、東側の渦は最大の効果を持つので、流れに働く合力は「西」に向ってそれを押すことである。

第4項、

$$(10) \quad +\mu\gamma \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right), \text{ または } +\mu\gamma q$$

は同じように解釈される。そして、線が  $x$  の方向に垂直に上に行く磁場に置かれた、 $y$  の方向、すなわち、北の方向の流れ  $q$  はそれを「東」に向って押すだろう。

第5項、

$$(11) \quad -\frac{dp_1}{dx}$$

は単に流れは静水学的圧力  $p_1$  が消える方向に押されるだろう。

さて、我々は単位体積あたり媒質要素に働く合力の成分に対する表式を書き下すことができる。こうして：

$$(12) \quad X = \alpha m + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{d}{dx}(v^2) - \mu\beta r + \nu\gamma q = \frac{dp_1}{dx},$$

$$(13) \quad Y = \beta m + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{d}{dy}(v^2) - \mu\gamma p + \mu\alpha r = \frac{dp_1}{dy},$$

$$(14) \quad Z = \gamma m + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{d}{dz}(v^2) - \mu\alpha q + \nu\beta p = \frac{dp_1}{dz}.$$

各表式の第 1 項は磁極に作用する力を表す。

第 2 項は磁気の性質を持つ物体への誘導による作用を表す。

第 3 項と第 4 項は電流に作用する力を表す。

さらに一般的な研究に進む前に、我々は、我々が実験による法則を決定するために得たいと思う実際の現象のそれらの簡単な場合に対応している、特別な場合で、方程式 (12), (13), (14) を考えるつもりである。

我々は、量  $p, q, r$  が電流の 3 つの方向へ分解された成分であることを見出した。最初の瞬間に電流がない、または、 $p, q, r$  がゼロであると仮定しよう。その時、我々は (9) によって

$$(15) \quad \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0, \quad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

ここで我々は

$$(16) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\phi,$$

が  $\phi$  の完全微分であると学ぶ。だから、

$$(17) \quad \alpha = \frac{d\phi}{dx}, \quad \beta = \frac{d\phi}{dy}, \quad \gamma = \frac{d\phi}{dz}.$$

$\mu$  は渦の密度に比例し、媒質中の "磁気誘導容量" を表す。それは空気中で 1 であり、あるいは、どんな媒質中であろうと、実験はどれが磁気強度、電流の強さなどを決定するかで為された。

その時、 $\mu$  を一定であると仮定しよう。その時、

$$(18) \quad m = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{dx}(\mu\alpha) + \frac{d}{dy}(\mu\beta) + \frac{d}{dz}(\mu\gamma) \right) = \frac{1}{4\pi} \mu \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} \right)$$

は単位体積における仮想的な磁気物質の量を表す。式 (12), (13), (14) の第 1 項によって表された作用から生じる単位体積あたりに働く合力がないという場合、我々は  $m = 0$  を持つ、あ

るいは、

$$(19) \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0.$$

さて、式 (19) は、もし与えられた空間内で本当なら、その空間内で作用する力は、距離の 2 乗に反比例して引き合うか反発し合う、その空間を超えて力の中心の分布から生じそうなものである。

それゆえ、 $\mu$  が一様であり電流のない空間部分における力線は、遠隔作用する "仮想的物質" の理論から得られそうなものでなくてはならない。その理論の仮定は、我々のもののようではないが、結果は同じである。

単一磁極、すなわち、長い磁石の片方の端が、あまりに長くてもう片方の端があまりに遠くにありすぎて、我々が考えている場の部分に認識できるほどの効果を持たない場合を考えよう。その時、条件は、磁極で式 (18) が、そして他のあらゆる所で (19) が満足されなくてはならない。これらの条件の下での唯一の解は、

$$(20) \quad \phi = -\frac{m}{\mu} \frac{1}{r},$$

ここで、 $r$  は極からの距離であり、 $m$  は極の強さである。

同種の単位極に働く任意の点での斥力は、

$$(21) \quad \frac{d\phi}{dr} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^2}$$

である。

標準媒質  $\mu = 1$  では；それゆえ、斥力は媒質中では、クーロン (Coulomb) によって示されたように、単に  $\frac{m}{r^2}$  である。

大きな値の  $\mu$  を持つ媒質 (酸素、鉄塩の溶液などのような) では、我々の理論上、引力は空気中より「もっと小さく」あるべきである。そして、反磁性媒質中 (水、溶解ビスマスなどのような) では、同じ磁極間の引力は空気中より「もっと大きく」あるべきである。

それらが置かれた媒質の磁性的または反磁性的の性質に従って 2 つの磁石の引力の差を示すために必要な実験は、我々に知られた流体媒質の磁気容量の限られた範囲や全体の引力と比較して求められた差のわずかの量のために、大きな精度を必要とするだろう。

次に、半径が  $R$  であり、考えている力の場の大きさと比べて長さが無限である円筒導体を流れる、量が  $C$  である電流の場合を考えよう。

円筒の軸を  $z$  軸、流れの方向を正としよう。その時、導体内で単位面積あたりの流れの量は

$$(22) \quad r = \frac{C}{\pi R^2} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right)$$

である；それゆえ、導体内では

$$(23) \quad \alpha = -2\frac{C}{\pi R^2}y, \quad \beta = 2\frac{C}{\pi R^2}x, \quad \gamma = 0.$$

導体を越えたその周りの空間内では、

$$(24) \quad \phi = 2C \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

$$(25) \quad \alpha = \frac{d\phi}{dx} = -2C \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \beta = \frac{d\phi}{dy} = 2C \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \gamma = \frac{d\phi}{dz} = 0.$$

もし  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  が導体の軸から任意の点への垂直距離であるとすれば、単位北極は、もし観測者がそれを電流の方向に見るなら、それを時計回りの方向に導体を回るように動かそうとする、 $= \frac{2C}{\rho}$  を感じるだろう。

さて、距離  $\rho$  で  $xz$  面内に  $z$  軸に平行に走る電流を考えよう。電流量を  $c'$  としよう。そして、 $l$  を考えている部分の長さ、 $s$  を断面としよう。それゆえ、 $\frac{c'}{s}$  は単位断面あたり強度である。式 (12), (13), (14) 中の  $\rho$  に対してこの量を入れると、我々は単位体積あたり

$$X = -\mu\beta \frac{c'}{s}$$

を見いだす；そして  $ls$  を考えている導体の体積にかけると、我々は

$$(26) \quad X = -\mu\beta c' l = -2\mu \frac{C c' l}{\rho},$$

を見いだす。これは、第 2 の導体が距離の 2 乗に反比例する力で第 1 の方に引きつけられるだろうということを示す。

この場合にもまた我々は引力の総量は  $\mu$  の値に依存するが、 $\mu$  に反比例する代わりに直接に変化することを見いだす；だから、2 本の導線の間の引力は空気中より酸素中の方がより大きく、水中より空気中の方がより大きいだろう。

次に我々は分子渦の理論に関連して電流と起電力の性質を考えるつもりである。

## 2. 第2部。 — 電流に応用された分子渦の理論

我々はすでに磁石、磁気誘導の性質のある物質、電流の間に作用する力が力学的に説明されることを示した。それは、最低圧力の方向は観測された力線の方向にあり、最大と最小圧力の差はその点で力の大きさの2乗に比例するというように、周囲の媒質があらゆる点で圧力が異なる方向で異なるような状態に入れられた、重ね合わせとしてであった。

そういう応力の状態は、もし媒質中にあると仮定されるのなら、そして力線を制御する既知の法則に従って配置されるのなら、直接遠隔作用する通常の仮説に基づいて計算されたものと正確に同じ合力を持つ場の中にある、磁石や電流や他のものに作用するだろう。これは、この応力状態の「原因」またはそれが媒質中に維持され得るモードに関して、どんな特殊な理論にも無関係に正しい。それゆえ、我々は問い「観測された合力が説明され得る、力線によって示された媒質の条件に関して、どんな力学的仮説があるのか？」に満足な答えを持たなくてはならない。その答えは、力線は媒質のあらゆる点で「最小圧力」の方向を示すということである。

第2の問いは、「異なる方向における圧力差を生み出す力学的原因は何か？」でなくてはならない。この論文の第1部で、我々は、この圧力差は力線に平行な軸を持つ分子渦によって引き起こされると仮定した。

そしてまた、我々は、完全に任意に、これらの渦の向きは南北の力線に沿って見て、我々は渦が時計周りに回転するように見るべきであると仮定した。

それぞれの渦の周囲の速度は磁力の強度に比例しなくてはならないということ、そして、渦の物質の密度は媒質の磁気誘導容量に比例しなくてはならないということを見いだした。

しかしまだ我々は問い「どのようにこれらの渦は回転するのか？」、「なぜそれらの渦は磁石や電流の力線の既知の法則に従って配列されるのか？」には答えていなかった。これらの問いは、確かに前者のいずれかのものよりももっと高度な難しさを持っている；そして、私は提供できる提案をそれらへの条件付きの答えとして、第1の問いを解決する力学的演繹と、第2の問いへのもっともな答えを与えた渦仮説とに分けたいと思う。

さて、実際に我々はこれらの渦と電流との物理的な関係を調べることに立ち向かう。一方、我々はまだ電気の性質について、電気が1つの物質であるのか、2つの物質なのか、または、まったく物質ではないのか、あるいはまた、どんなふうに物質とは違うのか、そしてどのように電気が電気と結びつくのかどうかなどの疑いを持っている。

我々は、力線が電流によって影響を受けることを知っている。そして、我々は、流れについてそれらの線の分布を知っている；それゆえ、力から我々は流れの量を決定できる。我々の分子渦による力線の説明が正しいと仮定して、なぜ渦の特別な分布が電流を示すのだろうか？ この問いへの満足な答えは「電流とは何か？」という1つの非常に重要な問いへの長い道を導くだろう。

私は、平行軸と同じ方向に並んで回転する、ある媒質中の渦の存在を考える上で、大きな困難を見いだした。連続した渦の近接した部分は反対向きに動かなくてはならない；そして、媒質の一部の運動がどのように共存でき、それと接触する部分の反対運動をさらに生成するのかを理解することは難しい。

この種の運動を考える上で私の助けになった唯一の概念は、渦の運動とは反対向きにそれ自身の軸をそれぞれ回転する、粒子の層によって分けられた渦の運動である。それゆえ、粒子と渦の近接した面は同じ運動を持つ。

機械では、2つの車輪が同じ方向に回転するように意図されている時、1つの車輪がそれらの間で両方のギアが入るように置かれている。そして、この輪は "遊び車" と呼ばれる。私が提案しなくてはならない渦についての仮説は、遊び車として作用する粒子の層が、それぞれの渦と次の渦の間に挟まっている。だから、それぞれの渦は隣の渦をそれ自体と同じ方向に回転させることが出来る、というものである。

機械では、遊び車は一般に固定した回転軸について回転するように施されている；しかし、例えば、蒸気機関のシーメンス (Siemens) の调速機<sup>5</sup>におけるような、複円の歯車列や他の仕掛けでは、我々は中心が動くことが出来る遊び車を見いだす。すべての場合で、中心の運動は間に置かれた車輪の周囲の運動の半分の和である。我々の渦の運動とそれらの間の遊び車として挟まれた粒子層の運動の間で存在する関係を調べよう。

2.1. 命題 IV. — 2つの渦を分けている粒子層の運動を決定すること。

命題 II のように、軸の方向余弦を掛けた1つの渦の周囲の速度を  $\alpha, \beta, \gamma$  としよう。  $l, m, n$  をこの渦の面の任意の部分に垂直方向の方向余弦としよう。その面の外側が正であると見なされる。その時、その面のこの部分で渦の粒子の速度成分は、

$$\begin{aligned} n\beta - m\gamma & \quad x \text{ に平行,} \\ l\gamma - n\alpha & \quad y \text{ に平行,} \\ m\alpha - l\beta & \quad z \text{ に平行} \end{aligned}$$

となる。もしその面のこの部分が別の渦 (速度が  $\alpha', \beta', \gamma'$  である) と接触しているなら、それらの間に置かれた非常に小さな粒子の層が、粒子層が分断する渦の見かけの速度の平均をとるだろう。それゆえ、もし  $u$  が  $x$  方向にある粒子速度であれば、

$$(27) \quad u = \frac{1}{2}m(\gamma' - \gamma) - \frac{1}{2}n(\beta' - \beta),$$

なぜなら第2の渦に対して垂直方向は第1の渦と反対方向だからである。

2.2. 命題 V. — 単位時間内に  $x$  方向に単位面積を横切る粒子の総量を決定すること。  $x_1, y_1, z_1$  を第1の渦の中心座標、  $x_2, y_2, z_2$  を第2の渦の中心座標などとしよう。そして、  $V_1, V_2, \&c.$  を第1、第2、 $\&c.$  の渦の体積、  $\bar{V}$  をそれらの体積の平均としよう。  $dS$  を第1と第2の渦を分ける面積要素、  $x, y, z$  をそれらの座標としよう。  $\rho$  をあらゆる単位面の粒子量としよう。それから、もし  $p$  が単位時間あたりに  $x$  方向における単位面積を横切って移動する全粒子量であるとすれば、体積が  $\bar{V}$  である空間内の粒子の  $x$  に平行な全運動量は  $\bar{V}p$  となるだろう。そして、我々は

$$(28) \quad \bar{V}p = \sum u\rho dS$$

を得る。ここで和は体積  $\bar{V}$  内の任意の2つの渦を分離するあらゆる面に拡張されている。

第1と第2の渦を分離する面を考えよう。この面の要素を  $dS$  としよう。そして、その方向余弦を第1の渦に関して  $l_1, m_1, n_1$ 、第2の渦に関して  $l_2, m_2, n_2$  としよう；その時、我々

<sup>5</sup>グッディーヴ (Goodeve) の 'Elements of Mechanism'、118ページを見よ。

は

$$(29) \quad l_1 + l_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad n_1 + n_2 = 0$$

であることが分かる。

$\alpha, \beta, \gamma$  の値はその渦の中心の一部で変化する；だから、我々は

$$(30) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dx}(x_2 - x_1) + \frac{d\alpha}{dy}(y_2 - y_1) + \frac{d\alpha}{dz}(z_2 - z_1)$$

と書くことが出来る。 $\beta, \gamma$  に対しても類似の式を得る。

$u$  の値は以下のように書かれる：—

$$(31) \quad \begin{aligned} u = & \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dx} (m_1(x - x_1) + m_2(x - x_2)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dy} (m_1(y - y_1) + m_2(y - y_2)) + \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dz} (m_1(z - z_1) + m_2(z - z_2)) \\ & - \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dx} (n_1(x - x_1) + n_2(x - x_2)) - \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dy} (n_1(y - y_1) + n_2(y - y_2)) \\ & - \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dz} (n_1(z - z_1) + n_2(z - z_2)). \end{aligned}$$

$\sum updS$  の和を達成にするには、任意の閉曲面  $\sum ldS$  を回るとすべての項がゼロになること；また、形式  $\sum lydS$  の項は（ここで  $l$  と  $y$  は異なる方向で測られるが）ゼロとなること；しかし、形式  $\sum lxdS$ （ここで  $l$  と  $x$  は同じ座標軸に属すが）ゼロにならないが、その面で囲まれた体積に等しいことを我々は思いださなくてはならない。その結果は

$$(32) \quad \bar{V}\rho = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \right) (V_1 + V_2 + \&c.);$$

あるいは、 $\bar{V} = V_1 + V_2 + \&c.$  で割って、

$$(33) \quad \rho = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \right).$$

もし我々が

$$(34) \quad \rho = \frac{1}{2\pi}$$

とおけば、式 (33) は式 (9) の第 1 の式と同一となる。これは電流量とそれを取り巻く力線の強度の間の関係を与える。

それゆえ、我々の仮説に従うと、電流は隣接する渦の間に挟まれた動ける粒子の移動によって表される。我々は、これらの粒子は渦の大きさと比べて非常に小さく、すべての粒子のいっしょになった質量は渦の質量と比べて無視でき、周りの粒子とたくさんの渦が単一の完全な分子の媒質に含まれると考えることが出来る。粒子はそれらを隔てる渦の間を滑ることなく回転し、お互いに接触しないと考えられる。だから、それらが同じ完全な分子内に居残る限り、抵抗によるエネルギー損失はない。しかしながら、一方向に粒子の一般的な移動がある時、それらは1つの分子から別の分子へ通らなくてはならない。そして、そうする上で、電子エネルギーを消耗し熱を生成するように、抵抗を感じなくてはならない。

さて、ある媒質中にどんな任意のやり方で渦が配列されているものと仮定しよう。その時、量  $\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$ , &c. は一般に値を持つので、その媒質中に最初に電流を持つだろう。媒質の電気抵抗によって抵抗されるだろう；だから、それらは力の連続的な供給によって維持されていないのなら、それらは素早く消え去るだろう。そして、その時、我々は  $\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0$ , &c. を持つだろう；すなわち、 $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$  は完全微分（式(15)と(16)を見よ）であるだろう；だから、我々の仮説は力線の分布を説明する。

プレート  $V$  の図1において、垂直の円  $EE'$  が、矢印で示されているように、銅  $C$  から垂鉛  $Z$  へ導体  $EE'$  を通って流れる電流を表しているとしよう。

水平な円  $MM'$  が電気回路を貫く磁力線を表しているとしよう。北と南の方向は線  $SN$  と  $NS$  で示されている。

垂直な円  $V$  と  $V'$  は分子渦を表しているとしよう。その分子渦の磁力線はその軸である。 $V$  は時計回りに回転し、 $V'$  は反対に回転する。

この図から明白になるだろうことは、もし  $V$  と  $V'$  が連続した渦であったなら、それらの間に置かれた粒子は下方に動くだろう；そしてもし粒子が任意の原因によって下に力を受けたなら、それらは渦を図のように回転させるだろうということである。こうして、我々は1つの観点を得た。この観点から我々は電流と磁力線の間を歯の生えた車輪または歯板と駆動する歯車の関係に類似であると見なされる。

この論文の第1部で、我々は系の静的な力の関係を研究した。さて、我々は機械系と考えられた部品の運動の関係を考へて来た。我々は系の動力学を研究し、そして異なる部品の運動における与えられた変化を生じるのに必要な力を決定すべきであるだろうということが残っている。

2.3. 命題 VI. — 媒質内にある渦の運動による媒質部分の実際のエネルギーを決定すること。

命題 II におけるように、 $\alpha, \beta, \gamma$  を周囲の速度成分であるとしよう。その時、単位体積の実際の渦のエネルギーは密度と速度の2乗に比例するだろう。我々は各渦の密度分布と速度を知らないので、我々は直接にエネルギーの数値を決めることが出来ない；しかし、 $\mu$  はまた平均密度に対する未知の比であるけれども、定数であるので、単位体積あたりのエネルギーは

$$E = C\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

である。ここで  $C$  は決定されるべき定数である。

$$(35) \quad \alpha = \frac{d\phi}{dx}, \beta = \frac{d\phi}{dy}, \gamma = \frac{d\phi}{dz}$$

なる場合をとろう。

$$(36) \quad \phi = \phi_1 + \phi_2$$

としよう。そして、

$$(37) \quad \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{d^2\phi_1}{dy^2} + \frac{d^2\phi_1}{dz^2} \right) = m_1, \quad \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{d^2\phi_2}{dx^2} + \frac{d^2\phi_2}{dy^2} + \frac{d^2\phi_2}{dz^2} \right) = m_2.$$

としよう。その時、 $\phi_1$  は磁気系  $m_1$  による任意の点におけるポテンシャルである。 $\phi_2$  は磁気系  $m_2$  によって表された磁気分布によるポテンシャルである。すべての渦の実際のエネルギーは

$$(38) \quad E = \sum C\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)dV$$

である。積分は全空間で行われる。

これは部分積分（グリーン (Green) の 'Essay on Electricity', p. 10 を見よ）により

$$(39) \quad E = -4\pi C \sum (\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + \phi_1 m_2 + \phi_2 m_1) dV$$

に等しくなる。あるいは、

$$\sum \phi_1 m_2 dV = \sum \phi_2 m_1 dV$$

が証明された（グリーン (Green) の 'Essay', p. 10）ので、

$$(40) \quad E = -4\pi C \sum (\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + 2\phi_1 m_2) dV.$$

さて、磁気系  $m_1$  は静止状態にあり、磁気系  $m_2$  は空間を通過して  $x$  方向に  $\delta x$  だけ平行に動かされたとしよう；その時、 $\phi_1$  は  $m_1$  だけに依存するので、以前のまま残るだろう。だから、 $m_1\phi_1$  は定数であるだろう；そして  $\phi_2$  は  $m_2$  だけに依存するので、 $m_2$  についての  $\phi_2$  の分布は同じままであるだろう。だから、 $\phi_2 m_2$  は以前と同じであるだろう。変化するだろう  $E$  の唯一の部分は、 $2\phi_1 m_2$  に依存する部分である。なぜなら  $\phi_1$  は変位のために  $\phi_1 + \frac{d\phi_1}{dx}\delta x$  となるからである。それゆえ、変位による実際のエネルギー変化は、

$$(41) \quad \delta E = -4\pi C \sum \left( 2 \frac{d\phi_1}{dx} m_2 \right) dV \delta x.$$

しかし、式 (12) により、その運動の間に  $m_2$  に働く力学的力によって為された仕事は

$$(42) \quad \delta W = \sum \left( \frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x.$$

そして、我々の仮説は純粹に機械的なものであるので、我々は力の保存により

$$(43) \quad \delta E + \delta W = 0$$

を持たなくてはならない；すなわち、渦のエネルギー損失は磁石が運動することによって為された仕事によって埋め合わされなくてはならない。それゆえ、

$$-4\pi C \sum \left( 2 \frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x + \sum \left( \frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x = 0,$$

あるいは、

$$(44) \quad C = \frac{1}{8\pi};$$

それゆえ、単位体積あたりの渦のエネルギーは

$$(45) \quad \frac{1}{8\pi} \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

そして、体積が  $V$  である 1 つの渦のエネルギーは

$$(46) \quad \frac{1}{8\pi} \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) V;$$

である。

このエネルギーを生成か消滅させるためには、それに接触する粒子層の接線方向の作用によって、または、渦内の形の変化によって、仕事が渦に掛けられるか、渦から受け取られるかなくてはならない。我々は最初に渦と渦に接触する粒子層の間の接線方向の作用を調べるつもりである。

2.4. 命題 VII. — 渦を取り巻く粒子層によって単位時間に渦に消費されるエネルギーを見いだすこと。

$P, Q, R$  を粒子の全体に作用する力の 3 つの座標方向における成分であるとしよう。これらの量は  $x, y, z$  の関数である。各々の粒子は直径の両端で 2 つの渦に接触するので、粒子の

渦への反作用は等しく分割されるだろう。そして、粒子の全体に対して各々の渦に

$$-\frac{1}{2}P, \quad -\frac{1}{2}Q, \quad -\frac{1}{2}R,$$

であるだろう；しかし、粒子の見かけの密度は  $\frac{1}{2\pi}$  であるので（式(34)を見よ）、1つの渦に加わる力は

$$-\frac{1}{4\pi}P, \quad -\frac{1}{4\pi}Q, \quad -\frac{1}{4\pi}R$$

となるだろう。さて、 $dS$  を1つの渦の面素であるとしよう。垂直方向の方向余弦を  $l, m, n$  としよ。要素の座標を  $x, y, z$  としよ。面の速度成分を  $u, v, w$  としよ。その時、その面素にかかる仕事は

$$(47) \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}(Pu + Qv + Rw)dS$$

となるだろう。第1項、 $PudS$  から始めよう。 $P$  は

$$(48) \quad P_0 + \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}y + \frac{dP}{dz}z,$$

と

$$u = n\beta - m\gamma$$

と書ける。渦の面は閉曲面であることを思いだすと、それゆえ、

$$\sum nxdS = \sum mx dS = \sum nydS = \sum mzdS = 0,$$

と

$$\sum mydS = \sum nzdS = V$$

であるから、我々は

$$(49) \quad \sum PudS = \left( \frac{dP}{dz}\beta - \frac{dP}{dy}\gamma \right) V,$$

を見いだす。そして、単位時間内に渦に為された仕事は

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}(Pu + Qv + Rw)dS$$

$$(50) \quad = \frac{1}{4\pi} \left\{ \alpha \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + \beta \left( \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + \gamma \left( \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) \right\} V$$

となるだろう。

2.5. 命題 VIII. — 渦の運動変化と渦間の粒子層にかかる力  $P, Q, R$  の関係を見いだすこと。  
 $V$  を一つの渦の体積であるとしよう。その時、(46) からそのエネルギーは

$$(51) \quad E = \frac{1}{8\pi} \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) V,$$

である。そして、

$$(52) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi} \mu V \left( \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right),$$

である。この値を式 (50) で与えられたものとを比較すると、我々は

$$(53) \quad \alpha \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \mu \frac{d\alpha}{dt} \right) + \beta \left( \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \mu \frac{d\beta}{dt} \right) + \gamma \left( \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \mu \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

を見いだす。これは  $\alpha, \beta, \gamma$  のすべての値に対して正しいので、最初に  $\beta$  と  $\gamma$  が消えると  $\alpha$  で割れば、そして同じようにして、

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = \mu \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = \mu \frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = \mu \frac{d\gamma}{dt}, \end{cases}$$

を見いだす。

これらの方程式から、我々は運動の変化、 $\frac{d\alpha}{dt}$ , &c. と渦の間の粒子層に働く力の関係、あるいは、我々の仮説の言葉で言えば、磁場状態の変化とそれによって役割をもたらされる起電力の関係を決定することが出来る。

論文「回折の動的理論について」("On the Dynamical Theory of Diffraction", Cambridge Philosophical Transactions, vol. ix. part 1, section 6) において、ストークス (Stokes) 教授は、我々が式 (54) を解くことができる、そして  $P, Q, R$  をそれらの方程式の右辺の量で表すことができる方法を与えた。私は、この方法を電気と磁性の問題への応用を指摘した<sup>6</sup>。

<sup>6</sup>Cambridge Philosophical Transactions, vol. x. part 1. art. 3, "On Faraday's Lines of Force".

それから、方程式

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} = \mu\alpha, \\ \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = \mu\beta, \\ \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} = \mu\gamma, \end{cases}$$

から3つの量  $F, G, H$  を見いだそう。ここで条件

$$(56) \quad \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{dx} \mu\alpha + \frac{d}{dy} \mu\beta + \frac{d}{dz} \mu\gamma \right) = m = 0,$$

と

$$(57) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0,$$

を持つ。

(55) を  $t$  で微分し、(54) と比べると、我々は

$$(58) \quad P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt}, \quad R = \frac{dH}{dt},$$

を見いだす。

このようにして、我々は3つの量  $F, G, R$  を決定した。これらによって、我々は  $P, Q, R$  をこれらの後者の量を前者が変化する速度であると考えることによって見いだすことが出来る。すでに参照した論文において、私は量  $F, G, H$  をファラデー (Faraday) が存在すると予想し、「電気緊張状態」と呼んだ量の分解された部分として考えることに対する理由を与えた。その論文で、私は、式 (55) で表されたように、この電気緊張状態と磁力線の数学的關係、そしてまた、式 (58) で表されたように、電気緊張状態と起電力の数学的關係を述べた。さて、我々はそれらを我々の仮説と関連した機械的観点から解釈しなくてはならない。

一番最初に、我々は力線が電流によって生じる過程を調べるだろう。

$AB$ 、プレート  $V$  の図2が  $A$  から  $B$  の方向の電流を表すとしよう。 $AB$  の上下の大きな空間が渦を表すとしよう。そして、渦を隔てている小さな円がそれらの間に置かれた粒子層を表す (我々の仮説では電気を表す) としよう。

さて、左から右への電流が  $AB$  で始めるとしよう。 $AB$  の上の渦列  $gh$  は時計と反対向きに動き出すだろう。(我々はこの方向を +、時計方向を - と呼ぶ。) 我々は渦列  $kl$  は静止状態にあると仮定するだろう。その時、これらの列の間の粒子層は列  $gh$  によってそれらの下側に作用するだろう。そして、上側は静止しているだろう。もしそれらが自由に動くとなれば、それらは負の方向に回転するだろう。そして同時に右から左へ、あるいは、電流と反対向きに動くだろう。それゆえ、「誘起された」電流を形成するだろう。

もしこの流れが媒質の電気抵抗で阻止されるのなら、回転粒子は、それらが粒子の運動が回転運動まで減速されて、誘起電流が消滅するような速度を達成するまで、渦列  $kl$  の上に作

用し、それらを正の方向に回転するだろう。さて、もし初期電流  $AB$  が止まのならば、列  $gh$  の渦が阻止されるだろう。その一方で、渦列  $kl$  はまだ素早い運動を続けているだろう。粒子層  $pq$  を超える渦の運動量はそれらを左から右へ、すなわち、初期電流の方向に動かそうとする傾向にあるだろう；しかし、もしこの運動が媒質で阻止されるのであれば、 $pq$  を超える渦の運動は徐々に破壊されるだろう。

それゆえ、誘起電流の現象は渦の回転速度の場の一部分から他の部分への連絡の過程の一部である。

誘導電流を生成する上での渦の作用の例の1つとして、次の場合を取り上げよう：— プレート  $V$  の図3、 $B$  を表皮のあるワイヤーで均一に巻かれた一様な断面積の円の輪であるとしよう。もし電流がこのワイヤーを流れると、ワイヤーのコイル内に置かれた磁石は影響を強く受けるだろう。しかし、外部のどの点でも磁気効果は生じないだろう。その効果は2つの極が接触するまで丸く曲がった磁石の効果であるだろう。

もしコイルが適切に作られているのなら、その外部に置かれた磁石に働く効果は、電流が一定に留まるかまたは強度が変化するかどうかが発見されるだろう；しかしもし導体ワイヤー  $C$  が輪を任意の回数取り巻くのならば、コイル内の電流が変化するときはずっと起電力がそのワイヤーに働くだろう；そしてもし回路が閉じていれば、ワイヤー  $C$  内の実際の電流はないだろう。

この実験が示すものは、起電力を生成するために、導体ワイヤーが磁場の中の置かれる、または、磁力線がワイヤーの物質の中、またはその付近を通るという必要はないということである。必要とされる全ては、力線が導体回路を通ることであり、これらの力線が実験の間に量的に変化することである。

この場合に、我々が磁力線が一定であると仮定する渦は、すべて輪の穴の内部にあり、輪の外側ですべては静止している。もし輪を巻く導体ワイヤーがなければ、その時、第1電流が流れたり切られたりする時、それらを分離する粒子と渦の間の瞬間的な圧力を除いて、輪の外側には作用がない。もし輪を巻く連続的な導体ワイヤーがあれば、その時、第1電流が流れると、 $C$  を通って反対向きに電流が流れるだろう；そして電流が切れると、第1電流と同じ向きに  $C$  を通る電流が流れるだろう。

さて、我々は、電気が起電力 — しかしながら、この力は回路の抵抗によってまだ感じられるほどの電流の形成が妨げられる時存在する — を生む時、誘導電流が生じることを気づくことができる。それは、回転車輪の速度が増大するかまたは減少する時の機械における車輪の軸に働く圧力に対応する。

電気緊張状態は、その成分が  $F, G, H$  である、もし磁力線による電流が徐々にそれらの現実の値に達する代わりに、突然に静止から実際の値で始まったのであれば、起電力であるべきものである。それは、機械においては、もし実際の速度が突然にその前に静止状態にあった機械の回転車輪に与えられたのなら、車輪の軸に作用するだろう「衝撃」に対応する。

もし機械が回転車輪を止めることによって突然に停止させられたのなら、各車輪は機械が運動状態にあった時に受ける衝撃と等しくかつ正反対の衝撃を受けるだろう。

この衝撃は力学系のどの部分に対しても計算されうるものであり、そしてその点に対する「縮小運動量 (reduced momentum)」と呼ばれる。機械の変化した運動では、運動変化から生じる、任意の部分に働く実際の力は、縮小運動量を時間で微分することによって見いだされる。これは、起電力が同じ過程によって電気緊張状態から導かれるのを見いだしたのとちょうど同じようなものである。

渦の中心が静止している時、渦と起電力の速度の間関係を見いだしたように、我々は我々の理論を渦を含む流体に拡張しなくてはならない。そして、流体運動のすべての変化にさらさなくてはならない。もし我々が注意を流体の任意の1要素的な部分に留めるのなら、我々はそれは1つの場所から別の場所に移動するばかりか、ある方向に延ばされ、他の方向に縮められ、同時に(もっとも一般的な場合に)回転の変位によって向きが回転するというように、その形と位置もまた変える。

形と位置のこれらの変化は分子渦の速度変化を生じる。これは、今我々が調べなくてはならないことである。

形と位置の変化は、3つの軸の任意の集合についての3つの角回転といっしょに、いつも3つの直角軸方向の3つの単純な伸長または圧縮に還元され得る。最初に我々は3つの単純な伸長または圧縮の効果を考えるだろう。

2.6. 命題 IX. —  $x$  が  $x + \delta x$ ;  $y$  が  $y + \delta y$ ;  $z$  が  $z + \delta z$  となり; 形の体積は同一である時、直方体  $x, y, z$  における  $\alpha, \beta, \gamma$  の変化を見いだすこと。

命題 II により、我々は圧力に抗して渦によって為された仕事に対して

$$(59) \quad \delta W = p_1 \delta(xyz) - \frac{\mu}{4\pi} (\alpha^2 yz \delta x + \beta^2 zx \delta y + \gamma^2 xy \delta z)$$

を見いだす; そして、命題 VI により、我々はエネルギー変分に対して

$$(60) \quad \delta E = \frac{\mu}{4\pi} (\alpha \delta \alpha + \beta \delta \beta + \gamma \delta \gamma) xyz$$

を見いだす。和  $\delta W + \delta E$  はエネルギー保存によってゼロでなくてはならない。そして、 $xyz$  は定数であるから、 $\delta(xyz) = 0$ ; だから、

$$(61) \quad \alpha \left( \delta \alpha - \alpha \frac{\delta x}{x} \right) + \beta \left( \delta \beta - \beta \frac{\delta y}{y} \right) + \gamma \left( \delta \gamma - \gamma \frac{\delta z}{z} \right) = 0.$$

これが  $\alpha, \beta, \gamma$  のどんな関係とも独立に正しくあるべきであるために、我々は

$$(62) \quad \delta \alpha = \alpha \frac{\delta x}{x}, \quad \delta \beta = \beta \frac{\delta y}{y}, \quad \delta \gamma = \gamma \frac{\delta z}{z}$$

を持たなくてはならない。

2.7. 命題 X. —  $x$  軸について  $y$  から  $z$  への回転  $\theta_1$ 、 $y$  軸について  $z$  から  $x$  への回転  $\theta_2$ 、 $z$  軸について  $x$  から  $y$  への回転  $\theta_3$  による  $\alpha, \beta, \gamma$  の変化を見いだすこと。

$\beta$  の軸は  $x$  軸から角度  $\theta_3$  だけ離れるように動くだろう; だから  $x$  方向へ分解された  $\beta$  は 0 から  $-\beta \theta_3$  へ変化するだろう。

$\gamma$  軸は  $\theta_2$  だけ  $x$  軸に接近するだろう; だから  $\gamma$  の  $x$  軸への成分は 0 から  $\gamma \theta_2$  に変化する。

$\alpha$  の  $x$  方向の成分は回転の 2 乗に依存する量（これは無視される）によって変化する。それゆえ、この原因から  $\alpha, \beta, \gamma$  の変化は

$$(63) \quad \delta\alpha = \gamma\theta_2 - \beta\theta_3, \quad \delta\beta = \alpha\theta_3 - \gamma\theta_1, \quad \delta\gamma = \beta\theta_1 - \alpha\theta_2$$

である。

異なる部分の変位によって生成された線素の変化に対する最も一般的な表式は、9 個の量

$$\frac{d}{dx}\delta x, \frac{d}{dy}\delta x, \frac{d}{dz}\delta x; \frac{d}{dx}\delta y, \frac{d}{dy}\delta y, \frac{d}{dz}\delta y; \frac{d}{dx}\delta z, \frac{d}{dy}\delta z, \frac{d}{dz}\delta z;$$

に依存する。そしてこれらはいつも 9 個の別の量、すなわち、適切に選ばれた 3 個の軸  $x', y', z'$  に沿った、3 個の単純な伸びまたは圧縮、

$$\frac{\delta x'}{x'}, \frac{\delta y'}{y'}, \frac{\delta z'}{z'},$$

の言葉で表される。これらの軸の 9 個の方向余弦は、それらの 6 個の方程式を結びつける。これらは、3 つの独立な方程式と  $x, y, z$  軸についての 3 つの回転  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  と等価である。

$x, y, z$  の関して  $x'$  の方向余弦を  $l_1, m_1, n_1$ 、 $y'$  の方向余弦を  $l_2, m_2, n_2$ 、 $z'$  の方向余弦を  $l_3, m_3, n_3$  としよう；その時、我々は

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\delta x = l_1^2 \frac{\delta x'}{x'} + l_2^2 \frac{\delta y'}{y'} + l_3^2 \frac{\delta z'}{z'}, \\ \frac{d}{dy}\delta x = l_1 m_1 \frac{\delta x'}{x'} + l_2 m_2 \frac{\delta y'}{y'} + l_3 m_3 \frac{\delta z'}{z'} - \theta_3, \\ \frac{d}{dz}\delta x = l_1 n_1 \frac{\delta x'}{x'} + l_2 n_2 \frac{\delta y'}{y'} + l_3 n_3 \frac{\delta z'}{z'} + \theta_2, \end{cases}$$

を見いだす。 $\delta y$  や  $\delta z$  についても類似の方程式を持つ。

$\alpha', \beta', \gamma'$  を  $x', y', z'$  の軸に関する  $\alpha, \beta, \gamma$  の値であるとしよう；その時、

$$(65) \quad \begin{cases} \alpha' = l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma, \\ \beta' = l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma, \\ \gamma' = l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma, \end{cases}$$

を得る。それから我々は、

$$(66) \quad \delta\alpha = l_1\delta\alpha' + l_2\delta\beta' + l_3\delta\gamma' + \gamma\theta_2 - \beta\theta_3,$$

$$(67) \quad = l_1 \alpha' \frac{\delta x'}{x'} + l_2 \beta' \frac{\delta y'}{y'} + l_3 \gamma' \frac{\delta z'}{z'} + \gamma \theta_2 - \beta \theta_3,$$

を得る。 $\alpha', \beta', \gamma'$  の値を代入し、(64) と比較して、我々は、線素の形と位置の変化による  $\alpha$  の変化として

$$(68) \quad \delta \alpha = \alpha \frac{d}{dx} \delta x + \beta \frac{d}{dy} \delta x + \gamma \frac{d}{dz} \delta x,$$

を見いだす。 $\beta$  と  $\gamma$  の変化も同じような方程式を持つ。

2.8. 命題 XI. — 運動物体における起電力を見いだすこと。

運動する要素における渦の速度変化は 2 つの要因 — 起電力の作用と要素の形状と位置の変化による。それゆえ、 $\alpha$  の全体の変化は

$$(69) \quad \delta \alpha = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) \delta t + \alpha \frac{d}{dx} \delta x + \beta \frac{d}{dy} \delta x + \gamma \frac{d}{dz} \delta x,$$

である。しかし、 $\alpha$  は  $x, y, z$  と  $t$  の関数なので、 $\alpha$  の変化はまた

$$(70) \quad \delta \alpha = \frac{d\alpha}{dx} \delta x + \frac{d\alpha}{dy} \delta y + \frac{d\alpha}{dz} \delta z + \frac{d\alpha}{dt} \delta t,$$

と書くことができる。 $\delta \alpha$  の 2 つの値を等しいと置き、 $\delta t$  で割り、そして非圧縮性媒質の運動では、

$$(71) \quad \frac{d}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = 0,$$

であり、自由な磁性のない時には、

$$(72) \quad \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

であることを思い出すと、我々は

$$(73) \quad \frac{1}{\mu} \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + \gamma \frac{d}{dz} \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{d}{dx} \frac{dz}{dt} - \alpha \frac{d}{dy} \frac{dy}{dt} + \beta \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} + \frac{d\gamma}{dz} \frac{dx}{dt} - \frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{dt} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d\beta}{dy} \frac{dx}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

を得る。

$$(74) \quad \alpha = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} \right)$$

$$(75) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{d^2G}{dzdt} - \frac{d^2H}{dydt} \right),$$

と置くと（ここで、 $F, G, H$  は空間の固定点に対する電気緊張の成分の値である）我々の方程式は

$$(76) \quad P = \frac{d}{dz} \left( Q + \mu\gamma \frac{dx}{dt} - \mu\alpha \frac{dz}{dt} - \frac{dG}{dt} \right) - \frac{d}{dy} \left( R + \mu\alpha \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dx}{dt} - \frac{dH}{dt} \right) = 0$$

となる。

$\beta$  と  $\gamma$  の変分に対する表式は、対称性から書き下すことのできる2つの方程式を与える。3つの方程式の完全な解は、

$$(77) \quad \begin{cases} P = \mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt} + \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q = \mu\alpha \frac{dz}{dt} - \mu\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R = \mu\beta \frac{dx}{dt} - \mu\alpha \frac{dy}{dt} + \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}. \end{cases}$$

各方程式の第1と第2項は磁場中の物体の運動を表す。第3項は場中の磁石または電流の位置または強度の変化によって生じる電気緊張状態の変化による。そして  $\Psi$  は  $x, y, z, t$  の関数であり、これは最初の方程式の解に関する限り不定であるが、与えられた場合にいつも問題の状況から決定される。 $\Psi$  の物理的解釈は、空間の各点の「電氣的張力 (electric tension)」である。

物体運動に依存する起電力に対する表式における項の物理的意味は、磁力の場が  $x$  軸方向に強度  $\alpha$  で一様に磁化していると仮定することによって簡単化される。その  $t$  期、もし  $l, m, n$  が線導体の任意の部分の方向余弦で、 $S$  がその長さであるのなら、その導体の方向に分解された起電力は

$$(78) \quad e = S(Pl + Qm + Rn),$$

または、

$$(79) \quad e = S\mu\alpha \left( m \frac{dz}{dt} - n \frac{dy}{dt} \right),$$

となるだろう。すなわち、磁力方向に垂直に分解された、 $\mu\alpha$  (単位面積あたりの磁気誘導量) と  $S \left( m \frac{dz}{dt} - n \frac{dy}{dt} \right)$  (単位時間内に導体  $S$  によって掃かれた面積) の積である。

それゆえ、任意の導体部分における運動による起電力は、それが単位時間内に交差する磁力線の「数」によって測られる；そして、閉じた導体内の全起電力はそれを通過する力線の数の変化によって測られる；そして、その変化が、導体の運動、または、任意の外部の原因のいずれによって引き起されようと、これは真実である。

磁力線を横切る導体運動がその導体内に起電力を生じる機構を理解するために、我々は、命題 X で、渦を含む媒質の部分の形態変化がそれらの渦の速度変化を生じる；そして、特に、渦の軸方向媒質は伸び、これに垂直なすべての方向の収縮を伴って、渦の速度の増加を生じる；その一方で、軸が短くなり、側面が膨らむことで渦の速度が減少する、と我々が証明したことを思いださなくてはならない。

この渦速度変化は形状の変化の内部効果から生じ、外部の起電力には無関係である。それゆえ、もし速度変化が妨げられるか、抑えられたなら、起電力が生じるだろう。なぜなら、各渦はそれが運動を変化する傾向にある方向に周りの粒子に圧力をかけるからである。

図 4 の  $A$  は、南北に走る磁力線系を横切り、西から東へ矢印の方向に動く垂直ワイヤーの断面を表す。図 4 の曲線はそのワイヤーについての流体運動の線を表し、ワイヤーは定常とみなされ、流体はそれに相対的に運動している。この図から明らかなことは、流体の体積要素の形の変化を、その要素の形が系全体の絶対運動に依存するのではなく、その部分の相対運動に依存するように辿ることができることである。

ワイヤーの正面で、すなわち、東側で、ワイヤーが媒質の各部分に接近するにつれて、その部分は東から西の方向にますます圧縮され、北から南の方向に伸ばされる；そして、渦の軸が南北の方法にあるので、もし各渦の周囲に作用する起電力によって妨げられたり、抑制されることがなければ、それらの速度は徐々に命題 X によって増加する傾向にあるだろう。

我々は、渦が間に挟まった粒子を紙面に垂直に上に向かって動かす傾向にある時、起電力は正であると見なすだろう。

我々が渦を南から北に見る時、渦は時計回りに回転するように見える；だから各渦は西側で上に、東側で下に動く。それゆえ、各渦は速度を増加するように努力するワイヤーの正面で、上に向う起電力は西で大きく東で弱くならなくてはならない。それゆえ、上昇起電力は、はるか遠くの東 (起電力がゼロである) から、運動ワイヤーの正面 (上昇起電力が最大である) へ連続的に増大するだろう。

ワイヤーの背後で異なる作用が生じる。ワイヤーが媒質の各連続的な部分から離れるにつれて、渦速度を減少させるように、それゆえ、上昇起電力が各渦の西側より東側でより大きくなるように、その部分は東から西へ伸び、北から南へ縮む。それゆえ、上昇起電力ははるか遠く西 (起電力がゼロである) から運動ワイヤーの背後まで (上昇起電力が最大である) へ連続的に増大するだろう。

それゆえ、明らかな事は、東側へ動いている垂直ワイヤーはその中に上昇電流を生じるようにする起電力を感じるだろうということである。もしワイヤーの両端に導体回路が接していなければ、電流は生じる事はなく、磁力は変化しないだろう；しかしもしそんな回路が存

在すれば、電流が生じ、磁力線や渦の速度がそれらの状態からワイヤーの運動に先立って変化するだろう。磁力線の変化は図5に描かれている。ワイヤーの正面の渦は、単に圧力を生じる代わりに、実際に速度を増加させる。その一方、それらの背後は速度を減少させ、ワイヤーの側面にある渦はそれらの軸の方向が変化させられる；それゆえ、最終的な効果は運動に対する抵抗としてワイヤーに作用する力を生じることである。さて、我々は我々が作った仮定や我々が得た結果を要約することができる。

(1) 磁気電気現象は磁場のあらゆる部分における運動または圧力のある条件の下での物質の存在によるが、磁石または電流の間の距離の直接作用にはよらない。これらの効果を生じる物体は普通の物質のある部分であるかもしれないし、または物質と結びついているエーテルであるかもしれない。密度は鉄で最大であり、反磁性物質中で最少である；しかし、それは鉄の場合を除き、すべての場合で非常にまれでなくてはならない。なぜなら、他の物質は我々が真空と呼ぶものと磁気容量との大きな比を持たないからである。

(2) 磁力線が通る任意の部分の場の条件は、異なる方向で等しくない圧力の1つである。磁力線の方向は最少の圧力の方向である。だから、磁力線は張力線と考えられる。

(3) この圧力の不等式は、渦または渦巻きの媒質の存在によって生成される。そこでは、それらの軸が力線の方向にあり、力線の方向によって決定された回転方向を持つ。

我々は、方向は南から北に見る目撃者に対して時計回りの方向であると仮定した。ガラス状の電気の代わりに松やに状の電気を正であると仮定する事によって、既知の事実が関心を引かれる限り、我々は等しい妥当性で逆方向を選んだ。これらの渦の効果は、それらの密度に依存し、周囲の速度に依存し、それらの直径に無関係である。密度は磁気誘導に対する物質の容量に比例しなくてはならない。空気中の渦のそれは1である。速度は、非常にまれな媒質中で非常に大きな効果を生み出すために、非常に大きくなければならない。

渦の大きさは不定であるが、おそらく通常の物質<sup>7</sup>の完全な分子のものとは比べて非常に小さい。

(4) 渦はお互いに丸い粒子の単一層によって分離されている。それゆえ、細胞系が形成され、分配はこれらの層粒子であり、各細胞の物質は渦として回転する性質を持つ。

(5) 層を構成する粒子はそれらをつつ両方の渦と回転接触するが、お互いにこすり合わない。それらは、その物質の1つの「完全な分子」内に留まると仮定するなら、渦の間で完全に自由に回転し、場所を変える；しかし、1つの分子から別の分子へ移動する時に、それらは抵抗を感じ、そして、熱を含む、不規則運動を生じる。我々の理論では、これらの粒子は電気の役割を果たす。それらの並進運動は電流を構成し、それらの回転は場の一部から別の部分へ渦運動を伝達し、そして、このようにして、働くとされる、接線方向の圧力は起電力を構成する。完全な回転接触によって1つの渦と運動と連結した粒子の概念は、幾分見苦しく見えるかもしれない。私はそれを自然に存在する連結の1つのやり方としては前進させようとは思わないし、また、私は電氣的仮説として好んで賛成したいというつもりのもでもない。しかしながら、それは力学的に考えられる連結の1つのやり方なのである。そして、簡単に研究でき、そして、それは既知の電気電磁現象の間の実際の力学的関係を提供する；だから、私はこの仮説の暫定的かつ一時的な性質を理解するだけだが、この現象の真の解釈

<sup>7</sup>渦系の角運動量はそれらの平均直径に依存する；それゆえ、もし直径が非常に適当であったとしたら、磁石があたかもそれがその中で回転する物体を閉じ込めたかのように振る舞うだろうと期待し、そしてこの回転の存在が磁石の自由回転に関する実験によって検証されたに違いないかと期待する。私はこの方程式を調べるために実験を行ったが、その器具を未だに十分に試みてはいない。

の後で彼の研究においてそれによって隠されたことよりむしろ役に立ったということを経験が見いだすだろうと危険を犯して言いたい。

渦と粒子層との作用は部分的に接線方向である；だから、もし接触粒子間のどんなすべりまたは特異な運動があったのなら、力線に属するエネルギー損失やそのエネルギーから熱への緩やかな移動があるだろう。さて、我々は、ある磁石の磁力線がエネルギーを消費する事なく永遠に保持される事を知っている；それゆえ、我々は、媒質の異なる部分の間で接線方向の作用があるところはどこでも、それらの部分間のすべり運動はないと結論しなくてはならない。それゆえ、我々は渦と粒子はすべることなくお互いにいっしょに回転すると考えなくてはならない；そして、各々の渦の内部層はすべることなく外部層から適切な速度を受け取ると考えなくてはならない。そなわち、角速度は各々の渦を通じて同じでなくてはならない。

電磁気エネルギーが失われて熱に変わる唯一の過程は、1つの分子から別の分子へ電気が送られる場合である。すべての他の場合では、渦のエネルギーは、相当量の力学的仕事が磁気作用によって為された時にだけ減少する。

(6) 周囲の媒質への電流の影響は、電流の次の部分が電流と同じ方向へ動くように、電流に接触している渦を回転させることである。電流から最も遠い部分は、反対方向に動く；そして、もし媒質が伝導体なので、粒子がどの方向へも自由に動けるのなら、これらの渦の外側に接触している粒子は、電流の向きとは反対方向に動かされるだろう。だから、最初のものとは反対方向の誘導電流があるだろう。

もし粒子運動に抵抗がなければ、誘導電流は最初のものとは等しくかつ反対であり、そして最初の電流が切られた限り継続するだろう。だから、最初の電流のすべての遠隔作用を妨げるだろう。もし誘導電流に抵抗があれば、粒子はそれらを超えた渦にまで作用し、回転運動をそれらに伝達する。それは、最後に媒質中のすべての渦がそれらの間の粒子が回転運動を除き運動を行わず電流を生じないような回転速度で運動をするまでの間である。

1つの渦から別の渦への運動の伝達において、粒子と渦との間の力が生じる。これによって、粒子は1方向に圧力を受け、渦は反対方向に圧力を受ける。我々は粒子に働くこの力を起電力と呼ぶ。渦への反作用は、等しくかつ正反対であるので、起電力は媒質のどの部分も全体として動かす事ができない。それは電流を生じる事だけができる。最初の電流が止まった時、起電力はすべて反対方向に働く。

(7) 電流または磁石が導体中で動かされる時、場のどの部分における渦の回転速度もその運動で変化しない。この場合にはまた、力(これによって適切な量の回転が各渦に伝達される)は起電力を構成する。そして、もし許されるなら、電流を生じるだろう。

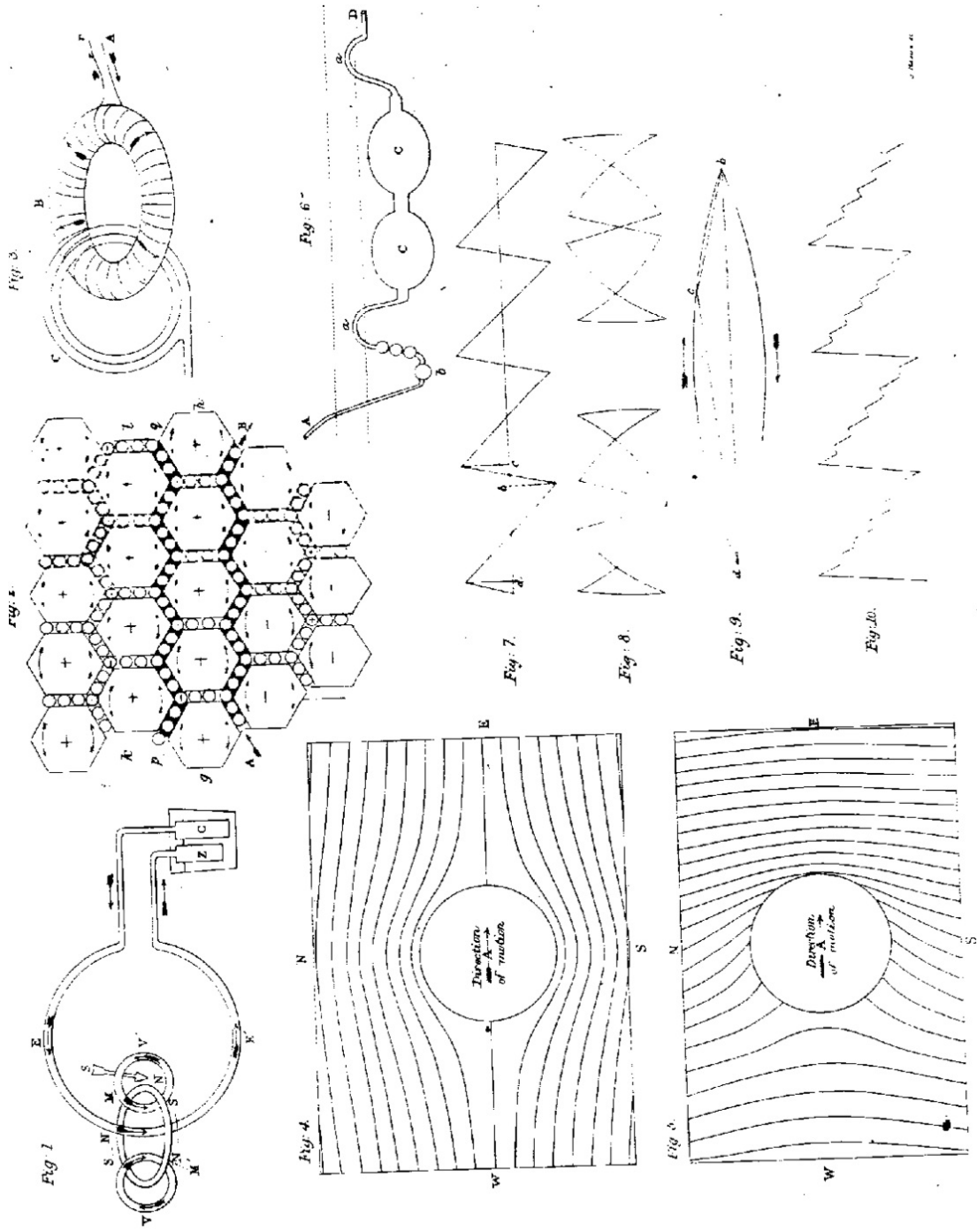
(8) ある導体が磁力の場の中で動かされる時、その中とその近傍の渦はそれらの場から外へ動かされ、形が変化する。これらの変化から生じる力は運動する導体に作用する起電力を構成する。そして、実験によって決定されたものと対応することが計算によって見いだされる。

さて、我々はどんなやり方で電磁現象が分子渦の架空の系によって模倣できるかを示した。この種の仮説をすでに放棄したいと思った人々は、数学的一貫性と、必要な結果と既知の事実の間でこれまでのところ十分な、比較を与えるために満足されなくてはならない条件をここに見出すだろう。異なる方向で事実の説明を求める人々は、この理論を物体を自由に流れる電流の存在の理論や、速度に依存する力で遠隔作用する電気を仮定し、それゆえ、エネルギー保存速に影響されない理論と比べる事ができる。

電気磁性の事実は非常に複雑でありさまざまである。いくつかの異なる仮定によってそれらの任意の数の説明が、物理学者にとってばかりか、どれほどの証拠が現象の説明が理論の

優先権に貸すのか、または、どの程度まで我々は2つの組みの現象の数学的表現における一致をこれらのもの現象が同じ種類のものであると見なすのか、ということを理解したいと思うすべての人々にとっても興味深いものでなくてはならない。我々は、この種の部分的な一致が発見されたと知っている；そして、それらが単に部分的なものであるという事実は他の観点における2つの集合の現象の法則の発散によって証明される。我々は、物理の高度な部分において、より完全な一致の瞬間を見いだすチャンスにあるかもしれない。これは、それらの窮極の多様性を検知するためにもっと研究が必要とするかも知れない。

2.9. 注釈. — この部分の最初の部分が書かれて以来、私は1859年のクレレの「雑誌」(*Crelle's Journal*)の中の、ヘルムホルツ(Helmholtz)教授の流体運動に関する論文を見た。その中で、彼は流体運動の流線は磁力線 — 回転状態にある流体のそれらの粒子の軸線に対応する電流の経路 — と同じ法則に従って配列すると指摘した。これは、その研究が電磁気と流体の両方を説明することができる、「物理的類推」の付加的な瞬間である。



## 3. 第3部。 — 静電気に応用された分子渦の理論

この論文の第1部で<sup>8</sup>、私はどのように磁石、電流、磁気誘導を持つ物質の間で働く力が回転する物質のたくさんの渦で占有された磁場（その磁場のあらゆる点でそれらの軸が磁力の方向と一致する）の仮説に基づいて説明されるということを示した。

これらの渦の遠心力は、最終的效果が我々が観測する力と方向と大きさが一致する力であるように分布した、圧力を生じる。

第2部で<sup>9</sup>、私は機構を記述した。この機構によって、これらの回転が共存し、力の磁気線の既知の法則に従って分布する。

私は回転物質を細胞と比べて非常に小さな粒子からなる細胞壁によってお互いが隔たれた、ある細胞の媒質であると考えた。そしてそれはこれらの粒子の運動と、その回転は1つの細胞から他の細胞まで伝達する細胞内の媒質への接線方向の作用によると考えた。

私はこの接線方向の作用を説明することは試みたのではなく、固体において観察されたものとのある意味で似ているが程度では異なるけれども、各細胞の外部から内部への回転伝達を説明するために、細胞内の媒質が形の弾性を所有するという仮定する必要がある。光の波動論は、光る媒質中で横波振動を説明するためにこの種の弾性を認める事を必要とする。それから、我々はもし磁気電気媒質が同じ性質を所有するとしても、驚くには及ばない。

我々の理論に従うと、細胞間の分配を形成する粒子が弾性物質を形成する。これらの粒子の運動は電流を形成する；接線方向の力（これにより粒子は細胞の物質によって圧力を受ける）は起電力であり、お互いに作用する粒子間の圧力は張力または弾性ポテンシャルに対応する。

さて、もし我々が、電気を“帯びた”と言われる時、周囲の媒質に関する物体の条件を説明でき、帯電物体間で作用する力を説明することができれば、我々は電気科学のすべての主たる現象間の関係を設立したことになるだろう。

実験によって我々は電気張力は、静電気で観測されるものもあるいは電流の電気に観測されるものと同じものであると知っている；だから、磁性によって生成される起電力はコイル機械によって為されるように、ライデン瓶 (Leyden jar) を帯電することができるかもしれない。

張力の差が任意の物体中の異なる部分に備わる時、電気は張力の大きな場所から小さな場所へ通るか、または、通ろうとする。もしその物体が導体であれば、電気の実際の通過が起こり；もし張力の差が保持されるのなら、電流が抵抗と逆比例する速度か、あるいは、物体の伝導率に比例する速度で流れ続ける。

電気抵抗は、非常に広い範囲の値をとる。金属の抵抗は最少であり、ガラスの抵抗は非常に大きく、電気の電荷がガラス容器にガラスの厚さを浸透することなく何年もの間保存されるほどである<sup>10</sup>。

電気の流れが流れないような物体は絶縁体と呼ばれる。しかし、電気はそれらを流れないのだけれども、電氣的な影響はそれらを通して伝播し、これらの影響の量は物体の性質に応じて異なる；だから、均一に良い絶縁体は誘電体<sup>11</sup>のような異なる形で働く。

ここで、それから、我々は物体の2つの独立な性質を持つ、1つは、物体がそれらを通じで電流を通すというもの、もう一つは、どんな電気もそれらを通すことはないが、それらを

<sup>8</sup>Phil. Mag. March 1861.

<sup>9</sup>Phil. Mag. April and May 1861.

<sup>10</sup>W. トムソン (Thomson) 教授による。

<sup>11</sup>Faraday, 'Experimental Research', Series XI.

通って電氣的作用を伝播するというものである。伝導物体は浸透膜に例えられるかもしれない。それは多かれ少なかれ抵抗で流体の通過に対抗する。その一方で、誘電体は弾性膜のようなものである。これは流体を浸透させないが、一方から他方への流体の圧力を伝達する。

起電力が導体に作用する限り、それは電流を生じる、これは抵抗と出くわすと、電氣エネルギーを熱に変換する機会となる。熱はその過程の逆によって電氣エネルギーとして再び貯蔵することができないものである。

誘電体に作用する起電力は、磁石の影響化で鉄粒子の極性の分布に似た<sup>12</sup>、そして、磁石の分極のように、あらゆる粒子が反対の条件で極を持つ、1つの状態として記述されることが可能である、その部分の分極の状態である。

誘導下の誘電体では、我々は各々の分子における電氣はあまりに離れていて一方が正に帯電し、他方が負の電氣を持っているが、電氣は分子に接したまま完全に残っていて、1分子からもう1つの分子に流れないと考えることができる。

全誘電体物質に働くこの作用の影響は、ある方向に一般的な電氣変位を生じることである。この変位は電流に達しない。なぜなら、それがある値に達した時、それは定数に留まるが、電流の始まりであり、その変位が増加または減少するのに従って、その変化は正または負の方向に電流を構成するからである。変位の量は、物体の性質や起電力に依存する；だから、もし  $h$  が変位で、 $R$  が起電力で、 $E$  が誘電体の性質に依存する係数であるなら、

$$R = -4\pi E^2 h;$$

そしてもし  $r$  が変位による電流の値であるなら、

$$r = \frac{dh}{dt}.$$

これらは誘電体の内部のメカニズムについての理論に独立である；しかし、我々が誘電体中の電氣変位を生じる起電力を見いだす時、そして我々が均一な起電力で電氣変位の状態から復活する誘電体を見いだす時、我々はその現象を圧力を生じたり、圧力が取り去られた時に形態を復活する弾性体の理論と見なすことに役立つことはできない。

我々の仮説に従えば、磁性媒質は電氣の役割を担う粒子層で構成された区分によって隔てられた細胞に分割される。電氣的粒子がどの方向に押されたとしても、細胞の弾性的媒質に働くそれらの接線方向の作用によって各々の細胞を変形し、細胞の弾性から生じる等しくかつ反対方向の力を働かせる。その力が取り去られると、細胞はそれらの形を取り戻し、電氣が元の位置に戻るだろう。

以下の研究では、私は細胞が球状であると仮定して変位とそれを生じる力の間の関係を考えた。おそらく細胞の実際の形は球状とは数値結果に十分な差を生じるほどには異なる。

私はこの結果から電氣の静的および動的の速度の間の関係を導いた。そして、MM. コールラウシュ(Kohlrausch)とウェーバー(Weber)の電氣磁氣実験をM. フィゾー(Fizeau)によって発見されたような光速度と比較して、空気中の磁性媒質の弾性は、もしこれら2つの共存的、同一の広がりを持つ、均一の弾性媒質がいくぶん1つの媒質でないのなら、発光性の媒質のものと同じであることを示した。

<sup>12</sup>モソチ(Mossotti)教授、"Discussione Analitica", Memorie della Soc. Italiana (Modena), vol. xxiv. part 2. p. 49. を見よ。

命題 XV からまた 2 つの帯電物体の間の引力は  $E^2$  の値に依存し、それゆえ、もし各物体の電気量が同じままであれば、空気中よりテレピン油内で少ないだろうということが明らかである。しかしながら、もし 2 つの物体の「ポテンシャル」が与えられたとしたら、それらの間の引力は  $E^2$  の逆数で変化するだろう。そして、空気中よりテレピン油中でより大きくなるだろう。

3.1. 命題 XII. — その表面が垂直な力と接線方向の力にさらされた弾性球の平衡条件を見出すこと。接線方向の力は球上に与えられた点からの距離の正弦 (sine) である。

$z$  軸を球座標の軸であるとしよう。

$\xi, \eta, \zeta$  を球の任意の粒子の  $x, y, z$  方向の変位であるとしよう。

$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$  を 3 軸に垂直な平面に直角の応力であるとしよう。そして、 $p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$  を平面  $yz, zx, xy$  内の変形応力であるとしよう。

$\mu$  を立方弾性係数であるとしよう。それゆえ、もし

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p,$$

なら、

$$(80) \quad p = \mu \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right).$$

$m$  を強度係数としよう、それゆえ、

$$(81) \quad p_{xx} - p_{yy} = m \left( \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} \right), \text{ \&c.}$$

それから、我々は等方的媒質における次の弾性方程式を持つ、

$$(82) \quad p_{xx} = \left( \mu - \frac{1}{3}m \right) \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) + m \frac{d\xi}{dx}.$$

$y$  と  $z$  方向も類似の方程式を持つ。そしてまた、

$$(83) \quad p_{yz} = \frac{m}{2} \left( \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right), \text{ \&c.}$$

球の場合、半径 =  $a$ 、そして

$$(84) \quad \xi = exz, \quad \eta = exy, \quad \zeta = f(x^2 + y^2) + gz^2 + d$$

と仮定しよう。その時、

$$(85) \quad \begin{cases} p_{xx} = 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + mez = p_{yy}, \\ p_{zz} = 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + 2mgz, \\ p_{yz} = \frac{m}{2}(e+2f)y, \\ p_{zx} = \frac{m}{2}(e+2f)z, \\ p_{xy} = 0. \end{cases}$$

$z$  に関して内部平衡の方程式は

$$(86) \quad \frac{d}{dx}p_{zx} + \frac{d}{dy}p_{yz} + \frac{d}{dz}p_{zz} = 0,$$

これはもし

$$(87) \quad m(e+2f+2g) + 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g) = 0,$$

なら、この場合に成り立つ。

球面上の接線応力は、この球の半径は  $xz$  平面内の軸から角距離  $\theta$  で  $a$  であるが、

$$(88) \quad T = (p_{xx} - p_{zz}) \sin \theta \cos \theta - p_{xz}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$(89) \quad = 2m(e+f-g)a \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{ma}{2}(e+2f) \sin \theta,$$

となる。 $T$  が  $\sin \theta$  と比例するために、第 1 項は消えなくてはならない、そしてそれゆえ、

$$(90) \quad g = e + f,$$

$$(91) \quad T = -\frac{ma}{2}(e+2f) \sin \theta.$$

表面上の任意の点で垂直応力は

$$N = p_{xx} \sin^2 \theta + p_{yy} \cos^2 \theta + 2p_{xz} \sin \theta \cos \theta$$

$$(92) \quad = 2 \left( \mu - \frac{1}{3}m \right) (e + g)a \cos \theta + 2ma \cos \theta ((e + f) \sin^2 \theta + g \cos^4 \theta);$$

あるいは、(87) と (90) によって、

$$(93) \quad N = -ma(e + 2f) \cos \theta.$$

任意の点の接線方向変位は

$$(94) \quad t = \xi \cos \theta - \zeta \sin \theta = -(a^2 f + d) \sin \theta.$$

垂直変位は

$$(95) \quad n = \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta = (a^2(e + f) + d) \cos \theta.$$

もし我々が

$$(96) \quad a^2(e + f) + d = 0$$

とすれば、垂直変位はゼロになり、変位は完全に接線方向変位だけとなるだろう。そして、我々は

$$(97) \quad t = a^2 e \sin \theta$$

を得るだろう。

この見かけの力によって為された全仕事は

$$U = \frac{1}{2} \sum (Tt) dS,$$

ここで、和は球面全体に渡って行われる。

球の物質内の弾性エネルギーは

$$(98) \quad U = \frac{1}{2} \sum \left( \frac{d\xi}{dx} p_{xx} + \frac{d\eta}{dy} p_{yy} + \frac{d\zeta}{dz} p_{zz} + \left( \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) p_{yz} + \left( \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right) p_{zx} + \left( \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) p_{xy} \right) dV,$$

ここで、和は球の全体積に渡って行われる。

我々がすべきであるように、我々はこれらの量は同じ値である。すなわち、

$$(99) \quad U = -\frac{2}{3}\pi a^5 m e(e + 2f).$$

さて、我々は表面への接線方向の作用は面に接する粒子層から生じると仮定した。ここで、粒子はそれら自体の相互圧力で作用し、それらが接している2つの細胞の表面に作用する。

我々は、 $z$  軸は粒子間で最大の圧力変化の方向にあると仮定した。そして、我々はその方向にある粒子に作用する起電力  $R$  とそれに伴う電気変位  $h$  の間の関係を決めなくてはならない。

3.2. 命題 XIII. — 一様な起電力が  $z$  軸に平行に作用する時、起電力と電気変位の関係を見いだすこと。

表面の任意の面素  $\delta S$  をとろう。これは密度  $\rho$  の層で覆われ、 $z$  軸に垂直からの角度  $\theta$  を持つ；その時、それに働く接線方向の力は

$$(100) \quad \rho R \delta S \sin \theta = 2T \delta S,$$

ここで  $T$  は、以前のように、表面の各側に働く接線方向の力である。方程式 (34)<sup>13</sup>にあるように、 $\rho = \frac{1}{2\pi}$  とおくと、我々は

$$(101) \quad R = -2\pi m a(e + 2f).$$

球の変形による電気変位は

$$(102) \quad \sum \delta S \frac{1}{2} \rho t \sin \theta \quad \text{全表面に渡って行われる;}$$

そしてもし  $h$  が単位体積あたりの電気変位であるのなら、我々は

$$(103) \quad \frac{4\pi}{3} \pi a^3 h = \frac{2}{3} a^4 e,$$

または

$$(104) \quad h = \frac{1}{2\pi} a e;$$

<sup>13</sup>Phil. Mag. April 1861.

それゆえ、

$$(105) \quad R = -4\pi^2 m \frac{e + 2f}{e} h,$$

または、我々は

$$(106) \quad R = -4\pi E^2 h,$$

と書く。ただし

$$(107) \quad E^2 = -\pi m \frac{e + 2f}{e},$$

と仮定している。(87) と (90) から  $e$  と  $f$  を見いだして、我々は

$$(108) \quad E^2 = \pi m \frac{3}{1 + \frac{5}{3} \frac{m}{\mu}},$$

を得る。 $m$  と  $\mu$  の比は物質で異なる；しかし、弾性が粒子のペアの間で作用する力に完全に依存する媒質では、この比は 6 と 5 の比である。そしてこの場合には、

$$(109) \quad E^2 = \pi m.$$

圧縮に対する抵抗が変形に対する抵抗より無限に大きい時、ガムまたはジェリーによるわずかに弾性を与える液体では、

$$(110) \quad E^2 = 3\pi m.$$

$E^2$  の値は、これらの極限の間にある。我々の細胞の媒質は前者の種類であり、我々は  $E^2$  の第 1 の値を使わなくてはならない。これは、仮説的に "完璧な" 固体<sup>14</sup>に属する。この固体では、

$$(111) \quad 5m = 6\mu,$$

それゆえ、我々は方程式 (108) を使わなくてはならない。

<sup>14</sup>Rankine, "On Elasticity", Camb. and Dub. Math. Journ. 1851. を見よ。

3.3. 命題 XIV. — 媒質の弾性による影響のための電流の方程式 (9)<sup>15</sup>を補正すること。

我々は起電力と電気変位が方程式 (105) で結び付けられていることを見て来た。この式を  $t$  で微分して、我々は

$$(112) \quad \frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt},$$

を見いだす。これは起電力が変化するとき、電気変位もまた変化することを示している。しかし、変位の変化は電流に等価であり、この電流は式 (9) で考慮され、 $r$  に加えられなくてはならない。その時、その3つの方程式は、

$$(113) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2} \frac{dP}{dt} \right), \\ q = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2} \frac{dQ}{dt} \right), \\ r = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2} \frac{dR}{dt} \right), \end{cases}$$

ここで、 $p, q, r$  は  $x, y, z$  方向の電流である； $\alpha, \beta, \gamma$  は磁力の成分である； $P, Q, R$  は起電力である。さて、もし  $e$  が単位体積あたりの自由電荷量であれば、連続の方程式は

$$(114) \quad \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} + \frac{de}{dt} = 0,$$

となる。(112) をそれぞれ  $x, y, z$  で微分して、代入すると、我々は

$$(115) \quad \frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi E^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right),$$

を見いだす；それゆえ、

$$(116) \quad e = \frac{1}{4\pi E^2} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right),$$

ここで、定数は省略されている。なぜなら、起電力がない時は、 $e = 0$  だからである。

<sup>15</sup>Phil. Mag. March 1861.

3.4. 命題 XV. — 2つの帯電物体の間で働く力を見いだすこと。  
電気変位から生じる媒質内のエネルギーは、

$$(117) \quad U = - \sum \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh) \delta V,$$

ここで、 $P, Q, R$  は力、 $f, g, h$  は変位である。さて、物体の運動または力の変化がない時、式 (77) から

$$(118) \quad P = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\Psi}{dz};$$

そして、我々は (105) によって

$$(119) \quad P = -4\pi E^2 f, \quad Q = -4\pi E^2 g, \quad R = -4\pi E^2 h;$$

それゆえ、

$$(120) \quad U = \frac{1}{8\pi E^2} \sum \left( \left( \frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 \right) \delta V.$$

すべての空間を通じて部分積分をして、 $\Psi$  が無限遠で消えることを思いだすと、

$$(121) \quad U = -\frac{1}{8\pi E^2} \sum \Psi \left( \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) \delta V;$$

あるいは、(115) によって、

$$(122) \quad U = \frac{1}{2} \sum (\Psi e) \delta V.$$

さて、2つの帯電物体があるとしよう。そして、 $e_1$  を第1のものの電気分布、 $\Psi_1$  をそれによる電気張力であるとしよう。そして、

$$(123) \quad e_1 = \frac{1}{4\pi E^2} \left( \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dz^2} \right)$$

としよう。

$e_2$  を第2の物体の電気分布、 $\Psi_2$  をそれによる張力であるとしよう；それから、任意の点での全張力は  $\Psi_1 + \Psi_2$  となるだろう。そして、 $U$  に対する展開は

$$(124) \quad U = \frac{1}{2} \sum (\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_1 e_2 + \Psi_2 e_1) \delta V$$

となるだろう。

電気が  $e_1$  の物体がある仕方で動かされたとしよう。電気はその物体といっしょに動く。その時、張力  $\Psi_1$  の分布は物体といっしょに動くので、 $\Psi_1 e_1$  の値は同じままである。

$\Psi_2 e_2$  の値もまた同じままである；そしてグリーン (Green) が  $\Psi_1 e_2 = \Psi_2 e_1$  と示した (Essay on Electricity, p.10) ので、その物体が電気力に抗して動くことによって為された仕事は

$$(125) \quad W = \delta U = \delta \sum (\Psi_2 e_1) \delta V$$

である。そして、もし  $e_1$  が小さい物体に閉じ込められているのなら、

$$(126) \quad \begin{aligned} W &= e_1 \delta \Psi_2, \\ F dr &= e_1 \frac{d\Psi_2}{dr} dr, \end{aligned}$$

ここで  $F$  は抵抗、 $dr$  は運動である。

もし物体  $e_2$  が小さければ、もし  $r$  が  $e_2$  からの距離であれば、式 (123) は

$$\Psi_2 = E^2 \frac{e_2}{r}$$

を与える；それゆえ、

$$(127) \quad F = -E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2};$$

または、力は距離の 2 乗に反比例する斥力である。

さて、 $\eta_1$  と  $\eta_2$  を静的に測られた同じ電気量であるとしよう。その時、我々は電気量の定義から

$$(128) \quad F = -E^2 \frac{\eta_1 \eta_2}{r^2};$$

そして、これは

$$(129) \quad \eta_1 = E e_1, \quad \eta_2 = E e_2$$

が仮定されると、満たされるだろう；だから、命題 XIII で前に決定された量  $E$  は任意の電気量の動電氣的測度が静電氣的測度を得るためにかけ算されなくてはならない数である。

面積が 1 の輪を巡回する、輪の面に垂直に置かれた強さ 1 で長さが 1 の磁石が生じるのと同じ効果を離れた磁石に生じる電流は単位電流である；そして、静的に測定された、 $E$  単位の電気は、1 秒でこの電流の断面積を通る、— これらの単位は、単位距離に置かれた、これらの任意の 2 つが単位力でお互いに反発するようなものである。

我々は、 $E$  単位の正電気がワイヤーを正方向に動くか、あるいは、 $E$  単位の負電気が負方向に動くか、または、3 番目として、 $\frac{1}{2}E$  単位の正電気が正方向に動き、一方、 $\frac{1}{2}E$  単位の負電気が負方向に同時に動くかのいずれかを仮定できる。

最後のものは、MM. ウェーバー (Weber) とコールラウシュ (Kohlrausch)<sup>16</sup> が実行した仮定である。かれらは、

$$(130) \quad \frac{1}{2}E = 155,370,000,000$$

を見いだした、長さの単位はミリメートルであり、時間の単位は 1 秒である。それゆえ、

$$(131) \quad E = 310,740,000,000$$

である。

3.5. 命題 XVI. — 弾性媒質の弾性は完全に粒子対間で作用する力によるという仮定に基づいて、その媒質の細胞が形成された、弾性媒質を通る横振動の伝播測度を見いだすこと。

研究の普通の方法によって、我々は

$$(132) \quad V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}$$

を知っている。ここで、 $m$  は横弾性係数であり、 $\rho$  は密度である。第 I 部の方程式を参照して、もし  $\rho$  が渦の物質の密度であり、 $\mu$  が "磁気誘導係数" であるとすれば、

$$(133) \quad \mu = \pi\rho;$$

それゆえ、

$$(134) \quad \pi m = V^2\mu;$$

そして (108) によって、

$$(135) \quad E = V\sqrt{\mu}.$$

<sup>16</sup>Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft, vol.iii.(1857), p.260.

空気中または真空中では  $\mu = 1$ 、そしてそれゆえ、

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = E, \\ = 310,740,000,000 \text{ mm/s}, \\ = 193,088 \text{ miles/s}. \end{array} \right.$$

空気中の光の速度は、M. フィゾー (Fizeau)<sup>17</sup>によって測定されたように、70,843 リーグ/s(1度に対して25リーグ)である<sup>18</sup>。これは

$$(137) \quad \begin{aligned} V &= 314,858,000,000 \text{ mm/s}. \\ &= 195,647 \text{ miles/s}. \end{aligned}$$

を与える。我々の仮想的な媒質中の横振動の速度は、MM. ウェーバー (Weber) とコールラウシュ (Kohlrausch) の電磁気実験から計算されたように、M. フィゾー (Fizeau) の光学実験から計算された光速と厳密に一致するので、我々は「光は電気と磁気の現象の原因であるその同じ物質の横波振動にある」という推測を避けるのは無理である。

3.6. 命題 XVII. — 2つの導体面に置かれた与えられた任意の誘電体からなるライデン瓶 (Leyden jar) の電気容量を見いだすこと。

2つの面の電気張力または電位を  $\Psi_1$  と  $\Psi_2$  としよう。S を各面の面積、 $\theta$  をそれらの間の距離、 $e$  と  $-e$  を各面の電気量としよう；その時、容量は

$$(138) \quad C = \frac{e}{\Psi_1 - \Psi_2}.$$

誘電体内では、我々は表面に垂直な  $\Psi$  の変化は

$$= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\theta}$$

となる。どちらかの表面を超えると、この変化はゼロである。

ゆえに、(115) を表面に適用することにより、単位面積上の電気は

$$(139) \quad \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{4\pi E^2 \theta}$$

<sup>17</sup>Comptes Rendus, vol. xxix. (1849), p. 90. ガルブレイス (Galbraith) とホートン (Haughton) の '天文学マニュアル (Manual of Astronomy)' に、M. フィゾー (Fizeau) の結果が1000ファソムの169,944地理学的マイルと述べられている。これは、193,118国際制定マイルを与える；光行差から導かれた値は192,000マイルである。[訳注：1ファソム = 6フィート(約1.83m)]

<sup>18</sup>訳注：1リーグ (league) = 約3マイル(約4.8km)。

そして、我々は装置の全容量

$$(140) \quad C = \frac{S}{4\pi E^2 \theta};$$

を導く；それゆえ、1つの表面に与えられた張力をもたらすために要する電気量は、面積に比例し、厚さに逆比例し、 $E$  の2乗に逆比例する。

さて、誘電体の誘導係数は、それらで形成された誘導装置の容量から導かれる；それゆえ、もし  $D$  がその係数であれば、 $D$  は  $E^2$  に逆比例して変化し、そして空気に対して1である。ゆえに、

$$(141) \quad D = \frac{V^2}{V_1^2 \mu},$$

ここで、 $V$  と  $V_1$  は空気中と媒質中の光速度である。さて、もし  $i$  が屈折率であれば、 $\frac{V}{V_1} = i$  であり、

$$(142) \quad D = \frac{i^2}{\mu};$$

それゆえ、誘電体の誘導の威力は、屈折率の2乗に比例し、磁気誘導の威力に逆比例する。

しかしながら、密度の濃い物質では、光学的、電氣的、そして磁氣的現象は全物質の粒子によって異なる程度で修正されるかも知れない；そして、それらの配列モードは異なる方向に異なる現象を引き起こすかもしれない。光学的、電氣的、そして磁氣的性質の軸は、おそらく一致するだろう；しかし、エーテル媒質上の重い粒子の反応の未知でたぶん複雑な性質を考慮して、これらの軸の光学的、電氣的、磁氣的比率の間の任意の数値的關係を発見することは不可能であるのかも知れない。

しかしながら、任意の与えられた軸に対する、 $E$  の値は光速度に依存する。光速度の振動はその軸に平行であるか、または、その分極面はその軸に垂直である。

単軸結晶では、 $E$  の軸性値は異常光線速度に依存するだろう。そして、赤道の値は正常光線の速度に依存するだろう。

”正の”結晶では、 $E$  の軸性値は最少で、負結晶では最大となるだろう。

$D_1$  の値は、これは  $E^2$  に逆比例して変化するが、他の事情が同じならば (*ceteris paribus*)、正結晶では軸方向に最大であり、方解石 (iceland spar) のような負結晶では赤道方向で最大であろう。もし半径 =  $a$  の球状結晶が、単位電気に力 =  $I$  で作用するはずの電気力場の中に吊るされているとすれば、そして、もし  $D_1$  と  $D_2$  が回転面内の2つの軸に沿う誘電係数であるとすると、もし  $\theta$  がその電気力の軸に対する傾きであれば、その球の向きを変えるようにするためのモーメントは

$$(143) \quad \frac{3}{2} \frac{(D_1 - D_2)}{(2D_1 + 1)(2D_2 + 1)} I^2 a^3 \sin 2\theta$$

であるだろう。そして、最大の誘電誘導 ( $D_1$ ) の軸は、電気力線に平行になる傾向にあるだろう。

## 4. 第4部。 — 磁性の偏光作用に応用された分子渦の理論

磁力線の分布と電流の分布の間の関連は、ある単位の仮想的な物質に為された仕事が、任意の閉曲線の回りで実行された時、その曲線を通過する電氣量に比例するということによって完全に表現される。この法則の数学的形式は(9)<sup>19</sup>のように表現される。これは、ここに再掲する。ここでは、 $\alpha, \beta, \gamma$  は磁力の強さの直角方向の成分であり、 $p, q, r$  は定常電流の直角方向の成分である。

$$(9) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right), \\ q = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right), \\ r = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right). \end{cases}$$

物理学において同じような結びつきが、他の集合の現象の間で見られる。

(1) もし  $\alpha, \beta, \gamma$  が変位、速度、または、力を表しているのなら、 $p, q, r$  は物体の基本部分における回転変位、回転速度、または、回転を生じる偶力モーメントであるだろう。

(2) もし  $\alpha, \beta, \gamma$  が一様で連続的な物質中の回転変位を表すのなら、 $p, q, r$  は最近接のそれらに関する粒子の「相対的な」直線の変位を表すだろう。W. トムソン (Thomson) 教授の論文 "電気、磁気、直流電流力 (Galvanic force) の力学的表現について" (On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces", Camb. and Dublin Math. Journ. Jan. 1847) を見よ。

(3) もし  $\alpha, \beta, \gamma$  が中心が固定された渦の回転速度を表すのなら、 $p, q, r$  はそれらの間に置かれた自由粒子が運ばれされるだろう速度を表す。

これらのすべての事例から、磁気と電気の関係はある組の現象の間と同じ数学形式を持っていることが明らかとなる。一方が「直線的」性質を持てば、他方は「回転的」性質を持つ。チャリス (Challis) 教授<sup>20</sup>は、磁性は流れの向きが磁力線の方に対応する流体の流れに本質があると考えている；そして、この理論では、もし依存していなければ、電流は流れの軸についての流体の回転運動に伴って起こる。ヘルムホルツ (Helmholtz) 教授<sup>21</sup>は、非圧縮流体の研究を行った。そして、線は任意の点でその流体の瞬間的な回転軸に一致するように引かれるものと考えた。彼は、流体運動の線は磁力線が電流に関して配列させられる法則と同じ回転線の法則に従って配列されると指摘した。一方、この論文では、私は磁性を回転現象と見なして、電流を現実の粒子移動であると見なした。このようにして、2つの現象の集まりの間関係の逆を仮定している。

さて、それ自体が縦の性質である、ある原因の直接的な影響のすべてはそれら自体縦のものでなければならず、そして、回転の原因の直接的な影響はそれら自体回転的でなければならぬと仮定することが自然に見える。ある軸に沿った並進運動は、もしそれが、スクリュー運動のような（軸に沿った与えられた方向の運動をその回りの与えられた方向の回転と結合

<sup>19</sup>Phil. Mag. March 1861.

<sup>20</sup>Phil. Mag. Decemver 1860, January and February 1861.

<sup>21</sup>Crelle, *Journal*, vol. lv. (1859), p. 25.

する) ある特別な機構と出会わないならば、その軸の回りの回転を生じることがありえない;そして、回転運動はそれ自体、その軸に沿った張力を生成するかもしれないけれども、その他よりむしろその軸に沿う1方向の流れを生じることができない。

電流はその流れの方向に転移 (transference) の効果を生じることが知られている。電流は、電気的狀態を1つの物体から別の物体に転送する。そして、電流は電解質の要素を反対方向に送る。しかし、電流は光が電流の軸方向に進む時は、光の偏光面が回転することを引き起さない<sup>22</sup>。

一方、磁気状態はどんな厳密に縦現象によっても特徴づけることができない。北極と南極は単に名前が違っただけであり、これらの名前はどんな磁気現象の記述も変えることなく交換できる;それに対して、電池の正極と負極はそこで放出される水の異なる要素によって完全に区別される。しかしながら、磁気状態は、ファラデー (Faraday)<sup>23</sup>によって発見された非常にきわだった回転現象 — 磁力線に沿って放射される時、偏光面は回転する — によって特長づけられる。

透明な反磁性物質が面偏光の光線を通す時、そしてその時、もし磁力線が磁石か電流の作用によってその物質中に生じるのであれば、伝播した光の偏光面が変化し、物質内の磁力の強度に依存する角度で向きを変えることが見いだされた。

反磁性物質中のこの回転方向は、その中に実際の磁力を生成するために正電気がその物質を循環しなくてはならない方向と同じである;あるいは、もし我々が地磁気 (terrestrial magnetism) の水平成分がその物質に作用する磁化力であると仮定するならば、偏光面は地球の真の回転方向、すなわち西から東上方、に向かなくてはならない。

常磁性物質では、M. ヴァーデット (Verdet)<sup>24</sup>が、偏光面は反対方向に向く、すなわち、もし磁化が物質を取り巻くらせんによって影響を受けたとすれば、負電気が流れるはずの方向へ向くということを見いだした。

両方の場合において、回転の絶対な方向は同じである、光が北から南に通るか、南から北へ通るかどうかである、— 石英 (quartz)、テレピン油 (turpentine) など (この中では、光の回転方向が逆の時に回転の絶対的方向が逆になる) によって生成された回転からこの現象を区別する事実である。後者における回転は、石英のような、軸に関係していようが、または、流体におけるような、そうは関係していなかろうが、光線の方向と回転方向の間の関係を示している。これは、右巻きまたは左巻きのスクリューの縦運動と回転運動との関係に似ている;そしてそれは、これらの性質を持つ結晶の外部形態に現われると知られているような、その数学的形式が右巻きか左巻きの関係を示す、物質のいくつかの性質を示している。磁気回転では、そのような関係は現われないが、回転方向は、磁性が本当に回転現象であることを示すように見えるやり方で、直接に磁力線と関係がある。

電流による定まった方向への電解質の移動と磁力による定まった方向への偏光の回転は、その事実の考察は、ヘルムホルツ (Helmholtz) によって指摘されたアナロジーに従う代わりに、または、チャリス (Challis) 教授によって提案された理論を採用する代わりに、私に磁性を回転現象と見なし、電流を並進運動現象と見なすように仕向けたものである。

電流が直線的であり、磁力が回転現象であるという理論は、いまのところ、アンペール (Ampère) とウェーバー (Weber) の理論と一致する;そして、磁気回転が磁力がどこに伸びて

<sup>22</sup>ファラデー (Faraday), 'Experimental Researches', 951-954, and 2216-2220.

<sup>23</sup>Ibid., Series XIX.

<sup>24</sup>Comptes Rendus, vol. xliii, p. 529; vol. xliv, p. 1209.

いようと存在し、これらの回転の遠心力が磁気引力を説明し、渦の慣性が誘導電流を説明するという仮説は、W. トムソン (Thomson) 教授の意見によって支持されている<sup>25</sup>。事実、この論文で発展させられた分子渦の理論全体は、媒質の作用を研究するそれらの人々が電気磁気現象の説明を探している方向を観察することによって私にほめかされて来たものである。

トムソン (Thomson) 教授は、光に働く磁気作用の原因は磁場中で起こる実際の回転でなくてはならないことを指摘した。「右巻き」の円偏光の光線は、磁力線に沿って北南または南北に進むかによって異なる速度で伝播することが見いだされた。さて、面偏光における振動方向について我々がどんな理論を採用しようと、右巻き円偏光光線の通過の間に媒質部の幾何学的配置は、光線が北または南に動くかどうかによらず厳密に同じである。唯一の差異は、粒子が反対方向にそれらの円を描くことだけである。それゆえ、「配置」は2つの場合で同じであるので、粒子間に作用する力は両方で同じでなくてはならない。そして、これらの力による運動はもし最初に媒質が静止しているのなら、速度が等しくなければならない；しかしもし媒質が回転状態にあれば、全体として、あるいは、分子渦内のいずれかで、光の円形の振動はそれらの方向が渦の方向と同じか反対かによって速度が異なるかもしれない。

さて、我々はこの論文で発展した仮説 — 磁力は小さな渦の遠心力によるということや、これらの渦がその振動が光を構成すると同じ物質からなるということ — が偏光への磁性の効果のような結論に導くかどうかを研究しなくてはならない。我々は横振動が磁化した媒質中を伝播すると仮定する。これらの振動の伝播はその媒質の部分が回転状態にある環境によってどのように影響を受けるだろうか？

以下の研究において、私は渦の回転が光に働くだらう唯一の効果は、

- (A) 物質の厚さに
- (B) 光線に平行な磁力の分解成分に
- (C) 光線の屈折率に
- (D) 空気中の波長の2乗の逆に
- (E) 渦の平均「半径」に
- (F) 磁気誘導容量に

— 比例する角度通して、渦と同じ方向に偏光面を回転することであるだろうということを見出した。

A と B は M. バーデット (Verdet)<sup>26</sup>によって十分に研究された。彼は回転は厳格に厚さや磁化力に比例すること、光線が磁化力に傾いているときは、回転はその傾き角のコサインとなることなどを示した。D は異なる光線間の真実の関係を与えると仮定されて来た；しかし、現象の正確な記述において C が考慮されなくてはならないことは確かである。回転は、波長の2乗に厳密に逆比例するのではなく、幾分早くなる；それゆえ、非常に屈折した光に対して回転はこの法則によって与えられたものよりずっと大きい、波長の2乗によって導かれた屈折率とより近い。

回転量と渦の大きさの関係 (E) は、異なる物質は、他の点で任意の観測できる差異に独立に回転力が異なることがあり得ることを示した。我々は渦の絶対的な大きさのことは何も知らない；そして、我々の仮説に関して光学現象はおそらく異なる媒質中で相対的な大きさを決定するための唯一のデータである。

<sup>25</sup>ニコル (Nichol) の *Cyclopedia*, art. "Magnetism, Dynamical Relations of", edition 1860; Proceedings of Royal Society, June 1855, and June 1861; Phil. Mag. 1857. を見よ。

<sup>26</sup>*Annales de Chimie et de Physique*, ser. 3. vol. xli. p. 370; vol. xliii. p. 37.

我々の理論に関して、偏光面の回転方向は分子渦のモーメントの平均モーメント、または、「角運動量」に依存する；そして、M. バーデット (Verdet) が磁性物質は反磁性物質と反対に光への効果を与えることを発見したので、分子回転はその2つの媒質の種類で反対でなくてはならない。

それゆえ、もはや我々は反磁性物体を磁気誘導係数が物体全体がまったく空の空間のものより小さい物体と考えることはできない。我々は反磁性状態を常磁性の「反対」であると認めなくてはならない；そして、渦または少なくとも、それらの影響のある大半は、反磁性物質中では正電気が磁化したコイル内で回転する方向に回転する。その一方で、常磁性媒質内では、それらは反対に回転する。

この結果はいままでのところ、常磁性の条件と反磁性の条件に言及している、M. ウェーバー (Weber)<sup>27</sup>の理論のその部分と一致する。M. ウェーバー (Weber) は、常磁性物体中の電気は回りのらせんと同じ方向に回転すると仮定する。一方、反磁性物体中では、それは反対方向に回転する。さて、我々が負または松やにの電気を、その物質がないと正またはガラスの電気を構成するという物質と見なすのなら、結果は実際に観測されるものであるだろう。これは、磁性と反磁性についての M. ウェーバー (Weber) の理論よりどの他の仮説にも独立して真実であるだろう。そして、これは、運動中の電気粒子の相互作用の M. ウェーバー (Weber) の理論が、我々の細胞と細胞壁の理論のいずれかを我々に認めさせる必要はない。

私は、鉄は磁性の強さと同様に作用の仕方においても他の物質とは異なるということを信じる方向に傾倒している；そして私は、その振る舞いは我々の分子渦の仮説に基づいて鉄自身の粒子が渦の接線方向の作用によって、それら自身とは逆方向に回転することを仮定することによって説明されると考える。こうして、これらの大きく重い粒子は、電気を構成する無限に小さな粒子が回転するが、それらのように自由でなければ、それらの場所を変え電流を形成すると我々が仮定したのと厳密に同じように回転するだろう。

こうして、磁化した場の回転の全「エネルギー」は、我々はそうであるだろうと知るように、大幅に増えるだろう；しかし、鉄粒子の「角運動量」は、エーテルの細胞のものとは反対であり、莫大に大きなものとなるだろう。だから、物質の全角運動量は、鉄の回転方向あるいは渦の回転と逆向きであるだろう。しかしながら、角運動量は物質の回転部分の絶対的な大きさに依存しているので、それは、物質の成分の窮極の性質に依存するのと同様に、集合体の状態または成分要素の化学的な配置に依存するかもしれない。他の自然現象は、あらゆる物質は多くの部分と有限の大きさからなり、これらの部分からなる粒子はそれら自身が内部運動を持っているという結論を導くように見える。

#### 4.1. 命題 XVIII. — 1つの渦の角運動量を見出すこと。

任意の物質系の1つの軸についての角運動量は、各粒子のその質量  $dm$  と、単位時間でその軸について記述する面積の2倍の積の和である；あるいは、 $A$  が  $x$  軸についての角運動量であるなら、

$$A = \sum dm \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right).$$

<sup>27</sup>テイラー (Taylor) の 'Scientific Memoirs', vol. v. p. 477.

我々は渦の内部の密度分布を知らないから、我々は角運動量と命題 VI で見出された渦のエネルギーとの関係を決定するだろう。

回転時間は渦を通じて同じであるから、平均角運動量  $\omega$  は一様で  $= \frac{\alpha}{r}$  あるだろう。ここで、 $\alpha$  は周囲での速度であり、 $r$  は半径である。その時、

$$A = \sum dmr^2\omega,$$

であり、そのエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum dmr^2\omega^2 = \frac{1}{2} A\omega, \\ &= \frac{1}{8\pi} \mu \alpha^2 V \quad \text{命題 VI より}^{28}, \end{aligned}$$

それゆえ、 $x$  軸に対して

$$(144) \quad A = \frac{1}{4\pi} \mu r \alpha V.$$

他の軸に対しても同様の表式を持ち、 $V$  は体積であり、 $r$  は渦の半径である。

4.2. 命題 XIX. — 渦群を含む媒質における波状運動 (undulatory motion) の条件を見出すこと。その振動は伝播方向と垂直である。

波が  $z$  軸方向に伝播する平面波であるとしよう。そして、 $x$  と  $y$  軸は  $xy$  平面内の最大と最小の弾性の方向にとられるとしよう。 $x$  と  $y$  をこれらの軸に平行な変位であるとしよう。これは、同じ波面を通じて同じである。それゆえ、我々は  $z$  と  $t$  だけの関数  $x$  と  $y$  を持つだろう。

$X$  を  $xy$  に平行な、単位面積あたりの接線方向の応力であるとしよう。これは、原点の付近の部分  $z$  方向に動かそうとする。

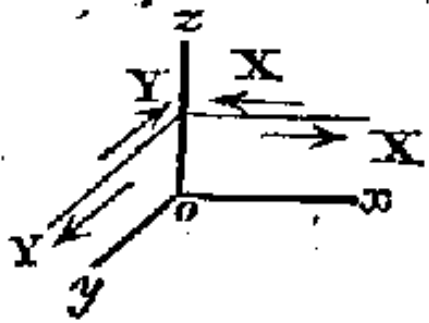
$Y$  を  $y$  方向における、対応する応力であるとしよう。

$k_1$  と  $k_2$  をこれら 2 種類の接線応力に関する弾性係数であるとしよう；それから、もし媒質が静止しているなら、

$$X = k_1 \frac{dx}{dz}, \quad Y = k_2 \frac{dy}{dz}.$$

さて、媒質中に渦群を仮定しよう。それらの速度は通常のようにシンボル  $\alpha, \beta, \gamma$  によって表される。そして、 $\alpha$  の値は、そこでは場中に起電力はない状態で、接線応力のみ作用のために  $\frac{d\alpha}{dt}$  の速度で増加するとしよう。面積が 1 で厚さが  $dZ$  の層における角運動量は  $\frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt} dz$  の率で増加する；もしこの効果を生み出す力  $Y$  の部分が  $Y'$  であるなら、 $Y'$  のモーメントは  $-Y' dz$  である。それゆえ、 $Y' = -\frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt}$  である。

<sup>28</sup>Phil. Mag. April 1861.



渦が変化する運動状態にある時  $Y$  の完全な値は、

$$(145) \quad \begin{cases} Y = k_2 \frac{dy}{dz} - \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt}, \\ X = k_1 \frac{dx}{dz} + \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\beta}{dt}. \end{cases}$$

厚さが  $dz$ 、面積 1 の層に作用する全力は、 $x$  方向に  $\frac{dX}{dz} dz$ 、 $y$  方向に  $\frac{dY}{dz} dz$  である。層の質量は  $\rho dz$  であるので、我々は運動方程式として

$$(146) \quad \begin{cases} \rho \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dX}{dz} = k_1 \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{d}{dz} \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\beta}{dt}, \\ \rho \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dY}{dz} = k_2 \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{d}{dz} \frac{1}{4\pi} \mu r \frac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

を得る。

さて、速度変化  $\frac{d\alpha}{dt}$ 、 $\frac{d\beta}{dt}$  は渦を含んでいる媒質の運動によって生じる。渦はその質量のあらゆる部分要素を变形しひねる；だから、我々はその運動によるこれらの量を決定するために命題 X<sup>29</sup>を参照しなくてはならない。そこで我々は式 (68)

$$(68) \quad \delta\alpha = \alpha \frac{d}{dx} \delta x + \beta \frac{d}{dy} \delta x + \gamma \frac{d}{dz} \delta x.$$

<sup>29</sup>Phil. Mag. May 1861.

$\delta x$  と  $\delta y$  は  $z$  と  $t$  だけの関数であるので、我々はこの方程式、そして同様にして

$$(147) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \gamma \frac{d^2x}{dzdt}, \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma \frac{d^2y}{dzdt}, \end{cases}$$

を得る；それゆえ、もし我々が  $k_1 = a^2\rho$ 、 $k_2 = b^2\rho$ 、そして  $\frac{1}{4\pi} \frac{\mu r}{\rho} \gamma = c^2$  とおけば、我々は運動方程式

$$(148) \quad \begin{cases} \rho \frac{d^2x}{dt^2} = a^2 \frac{d^2x}{dz^2} + c^2 \frac{d^3y}{dz^2dt}, \\ \rho \frac{d^2y}{dt^2} = b^2 \frac{d^2y}{dz^2} - c^2 \frac{d^3x}{dz^2dt}, \end{cases}$$

と書き下せる。これらの方程式は値

$$(149) \quad \begin{cases} x = A \cos(nt - mz + \alpha), \\ y = B \sin(nt - mz + \alpha), \end{cases}$$

によって満足される。これは

$$(150) \quad \begin{cases} (n^2 - m^2a^2)A = m^2nc^2B, \\ (n^2 - m^2b^2)B = m^2nc^2A, \end{cases}$$

を与える。最後の2つの式のいっしょに掛けると、我々は  $m^2$  に関して二次方程式である、

$$(151) \quad (n^2 - m^2a^2)(n^2 - m^2b^2) = m^4n^2c^4$$

を見いだす。この解は、

$$(152) \quad m^2 = \frac{2n^2}{a^2 + b^2 \mp \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4n^2c^4}}.$$

これらの  $m^2$  の値が式 (150) に代入されると、それぞれ  $A$  と  $B$  の比

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 - b^2 \mp \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4n^2c^4}}{2nc^2}.$$

を与える。これが (149) に代入されると、最初の (148) を満足するだろう。それゆえ、そんな媒質の最も一般的な波動は異なった速度で反対方向へ進行する 2 つの楕円的な波動の複合体である。その結果は  $a = b$  の場合により簡単に説明され得る；その時、

$$(153) \quad m^2 = \frac{n^2}{a^2 \mp nc^2} \quad \text{と} \quad A = \mp B.$$

$A$  の値が両方の振動に対して 1 であると仮定しよう。その時、我々は

$$(154) \quad \begin{cases} x = \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right), \\ y = -\sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right), \end{cases}$$

を持つだろう。

$x$  と  $y$  の第 1 項は負の方向の円振動を表し、第 2 項は正方向の円振動を表す。ここで、正の値は伝播の最大速度を持っている。項を結びつけると、我々は

$$(155) \quad \begin{cases} x = 2 \cos(nt - pz) \cos(qz), \\ y = 2 \cos(nt - pz) \sin(qz), \end{cases}$$

ここで、

$$(156) \quad \begin{cases} p = \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} + \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}}, \\ q = \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} - \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}}, \end{cases}$$

である。

これらの方程式は、振動周期が  $\frac{2\pi}{n}$  で波長が  $\frac{2\pi}{p} = \lambda$  で、 $z$  方向へ速度  $\frac{n}{p} = v$  で伝播する、平面振動からなる波動の方程式である。一方、振動面は  $z = \frac{2\pi}{q}$  の時 1 回転を完了するように  $z$  軸について正方向に回転する。

さて、 $c^2$  が小さいと仮定しよう。その時、我々は

$$(157) \quad p = \frac{n}{a} \quad \text{と} \quad q = \frac{n^2 c^2}{2a^3}$$

と書くことができる；そして、 $c^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{r}{\rho} \mu \gamma$  を思いだすと、我々は

$$(158) \quad q = \frac{\pi r}{2 \rho} \frac{\mu \gamma}{\lambda^2 v}$$

を見いだす。

ここで  $r$  は渦の半径であり、未知量である。 $\rho$  は物体内の光る媒質の密度である。これもまた未知量である；しかし、もし我々がフレネー (Fresnel) の理論を採用し、 $s$  を全物体のない空間における密度であるとすれば、

$$(159) \quad \rho = si^2$$

である。ここで、 $i$  は屈折率である。

マックロー (MacCullagh) とニューマン (Neumann) 理論に基づくと、全物体で

$$(160) \quad \rho = s.$$

$\mu$  は磁気誘導係数であり、真空中または空気中で 1 である。

$\gamma$  は通常単位で見積もられたそれらの周囲での渦速度である。その値は未知だが、磁力の強さに比例する。

$Z$  は地磁気の場合に測定された、場の磁気強度である。その時、単位体積あたりの空気中の内部エネルギーは

$$Z^2 = \frac{1}{8\pi}, \quad \frac{\pi s \gamma^2}{8\pi},$$

である。ここで  $s$  は空気中の磁性物質の密度である。これは、我々は発光性物質のものと同じであると信じる理由がある。それゆえ、我々は

$$(161) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} Z$$

と置く。 $\lambda$  は媒質中の波動の波長である。さて、もし  $\Lambda$  が同じ光線の空気中の波長で、 $i$  が物体中のその光線の屈折率であるとするなら、

$$(162) \quad \lambda = \frac{\Lambda}{i}.$$

また、媒質中の光速度  $v$  は、式

$$(163) \quad v = \frac{V}{i}$$

によって空気中の光速度  $V$  と関係がある。それゆえ、もし  $z$  が光線が通過する媒質の厚さで

あれば、偏光面が向きを変える角度は度数において

$$(164) \quad \theta = \frac{180^\circ}{\pi} qz;$$

または、我々が今計算したことによって、

$$(165) \quad \theta = 90^\circ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{r}{s^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu i Z z}{\Lambda^2 V}$$

となるだろう。

この式では、物体の渦の半径  $r$  と空気中の発光性物質の密度 ( $s$ ) を除いてすべての量は実験によって知ることができる。

M. バーデット (Verdet) の実験<sup>30</sup>は絶対測度における  $Z$  の決定を除いて欲しいものすべてを供給する；そして、これはまた、もしパリの地磁気によるもののような既知の磁場中の試験瓶の半回転に対する、電流計の振れの値が一度全部決定されたなら、彼のすべての実験に対して知られるだろう。

---

<sup>30</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, sér. 3. vol. xli, p. 370.