

## VIII. 電磁場の動力的理論

ジェームズ・クラーク・マックスウェル (JAMES CLERK MAXWELL)

### 1. 第1部 — 序文

(1) 電気実験や磁気実験における最も明らかな力学現象は相互作用である。これによって、ある状態の物体はまだお互いにかなり離れた距離にあるにもかかわらず、お互いに運動状態に置かれる。それゆえ、これらの現象を科学的形式に還元する上での第一段階はその物体間で働く力の大きさと方向を確定することである。そして、この力があるやり方で物体の相対的位置やそれらの電氣的または磁氣的条件に依存することが見いだされる時、一見すると、その電氣的状態または磁氣的状態を構成し、数学的法則に従って離れた距離で作用することのできる、各物体の中に静止状態または運動状態のいずれかにある何かの存在を仮定することにより、事実を説明することが自然であるように見える。

このように、静電気、磁気、電流を流しているコンデンサー間の力学的作用そして電流誘導の数学的理論が形成される。これらの理論において、2つの物体間に働く力は物体とそれらの位置の条件だけに関係し、それを取り巻く媒質の特別な考察をすることなく、取り扱うことができる。

これらの理論は、多かれ少なかれ、明らかに、物質の存在を仮定する。その物質粒子は、引力か斥力で離れた距離でお互いに作用する性質を持つ。この種の理論の最も完全な発展は、電氣的および磁氣的現象を同一の理論に含ませた、M. W. ウェーバー (Weber) のものである<sup>1</sup>。

しかしながら、そうすることで、彼は2つの電氣的粒子の間の力がそれらの距離と同様に相対速度に依存すると仮定する必要があることを発見した。

MM. W. ウェーバー (Weber) と C. ノイマン (Neumann)<sup>2</sup>によって発展させられたように、この理論は静電気、電磁引力、電流誘導、反磁性の現象への応用において極度に天才的であり、そしてすばらしく理解し易いものである；そして、それが、電氣的測定における一貫した単位系を導入することと、これまで知られていない精度で電氣的量を実際に決定することの両方によって、電氣科学の実際部分で非常に大きな前進をさせた人の推測を処理するために提供されるので、我々にはより一層の權威を持って見える。

---

*Date:* last revised on 19 Sept. 2011. translated to Japanese by Kazumoto Iguchi. Original paper: Received October 27, — Read December 8, 1864. James Clerk Maxwell, Philosophical Transactions of the Royal Society (London), 155 (1865) pp. 459 – 512.

<sup>1</sup>Electrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig Trans. vol. i. 1849, and Taylor's Scientific Memoirs, vol. v. art. xiv.

<sup>2</sup>"Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizarionis per virse electricas vel magneticas declinetur." — Halis Saxonum, 1858.

(2) しかしながら、速度に依存する力で遠隔作用する粒子の仮定に含まれる力学的困難は、現象の一致に導くことにこれまで役に立ってきたし、未だに役に立つかも知れないのだけれども、私がこの理論を窮極のものと考え、それを妨げるものである。

それゆえ、励起した物体の中と同様、周囲の媒質の中で働く作用によってそれらが生成されると仮定することによって、そして、直接に知覚できるほどの距離で作用することのできる力の存在を仮定することなく、離れた物体間の作用を説明しようと試みることによって、私は別の方向の事実の説明を必要とすることを好んできた。

(3) それゆえ、私が提案する理論は、「電磁場」の理論と呼ぶことができる。なぜなら、電氣的なまたは磁氣的な物体の近傍にある空間が必要だからである。そして、それは「動力的理論」と呼ぶことができる。なぜなら、観察される電磁気現象を生成する運動物体がその空間にあると仮定するからである。

(4) 電磁場は、電氣的または磁氣的条件にある物体を含み、それを取り巻く空間の部分である。

それは任意の種類で満たされる。あるいは、ガイスラー (Geissler) 管や他のいわゆる真空の場合のように、我々はすべての物質全部をからにするように努めることができる。

しかしながら、光や熱の波動を受け取ったり放出したりするために残された十分な物質がいつも存在する。そして、測定できる密度の透明物体がいわゆる真空に挿入される時、これらの放射の伝達が大きく変化しないので、波動はエーテル媒質の波動であり、物質全体の波動ではない(物質の存在は単にエーテルの運動をある仕方で変化させる)ということに認める義務がある。

それゆえ、我々は、光や熱の現象から、空間を満たし、物体を貫くエーテル媒質があるということに信ずべきいくつかの理由がある。そのエーテル媒質は、運動する性質や、一部分から他の部分へその運動を伝達する性質や、そしてさまざまな方法でエーテル媒質を熱したり影響を与えたりするように物質全体にその運動を伝達するという性質がある。

(5) さて、熱する事で物体に伝えられたエネルギーは、以前は運動媒質に存在しなくてはならなかった。というのは、波動はそれらが物体に到達する前のある時間熱源を残した。そしてその時間の間、エネルギーは半分が媒質の運動の形にあり、半分が弾性抵抗の形にある。これらの考察から、W. トムソン (Thomson) 教授は、媒質は物質全体の密度と比較できる密度を持たねばならない; そしてその密度への下方極限を割り当てなくてはならないと論じた<sup>3</sup>。

(6) それゆえ、我々が扱うものと独立な科学の分野から導かれた情報として、小さいけれども本当の密度を持ち、運動状態にあり、そして大きいが無限ではない速度で運動を一部から別の部分へ伝達する性質のある、充滿する媒質の存在を我々は受け入れることができる。

それゆえ、この媒質の部分は、あるやり方で一部の運動が残りの部分の運動に依存するほど非常に結びついていなくてはならない; そして、同時にこれらの連結は、運動のやり取りが瞬時ではなく時間がかかるので、ある種の弾性的な曲がりやすい性質を持たなくてはならない。

それゆえ、媒質は2種類のエネルギーを受け取り蓄える性質がある。それらは、その部分の運動に依存する "実際の" エネルギーと媒質が弾性のおかげで変位から戻る時にする仕事からなる、"位置 (potential) " エネルギーである。

<sup>3</sup> "On the Possible Density of the Luminiferous Medium, and on the Mechanical Value of a Cubic Mile of Sunlight", Transactions of the Royal Society of Edinburgh (1854), p. 57.

波動の伝播は、これらの形式の1つから別のものへのエネルギーの連続的な変換を含んでいる。どの瞬間でも全体の媒質中のエネルギーの量は等しく分割されるので、半分は運動エネルギー、半分は弾性的回復力である。

(7) そのような内容を持つ媒質は、光と熱の現象を生み出すものとは別の類いの運動と変位の性質を持つことができる。そして、これらのいくつかは、それらが生み出す現象によって我々の感覚に明確になる類いのものである。

(8) さて、我々は、発光性媒質はある場合に磁気で作用されることを知っている；なぜなら、ファラデー (Faraday)<sup>4</sup>は面偏光線がある透明な反磁性媒質を近くにある磁石または電流によって生成された磁力線の方向に横切る時、偏光面が回転を引き起こすことを発見したからである。

この回転はいつも実際の磁場を生成するように正電気が反磁性物体の周りを流れる方向にある。

それ以後、M. ヴァーデット (Verdet)<sup>5</sup>は、もしエーテル中の鉄の過塩化物溶液のような常磁性物体が反磁性物体に置き換えられるのなら、回転は反対方向になるということを見出した。

さて、W. トムソン (Thomson) 教授<sup>6</sup>は、唯一の運動が発光性の振動である媒質の部分間で作用する力の分布は、その現象を説明するためには十分ではないが、光を引き起こす振動運動に加えて磁化に依存する媒質中の運動の存在を認めなくてはならないと指摘した。

磁性による偏光面の回転がかなりの密度の媒質内だけで観測される；しかし、濃い媒質は単にエーテルの運動を変えること以上のことはしないと仮定できるということに関して、磁場の性質は1つの媒質を他のものに、または真空中に変えてもそれほど変わらないということは真実である。それゆえ、我々は、磁気的効果が観測される場所にはどこの上でも働くエーテル媒質の運動があるのかどうかを調べるための正当と認められる土台を持つ。そして、我々は、その軸として磁力の方向を取って、この運動が回転の1つであると仮定するいくつかの理由を持つ。

(9) さて、我々は電磁場で観測されるもう一つの現象を考えることができる。1つの物体が磁力線を横切って動く時、起電力と呼ばれるものを感じる；その物体の両端は正反対の電気を帯び、そして電流がその物体を流れようとする。その起電力が十分に力強く、ある化合物物体に作用する時、電磁場はそれらを分解し、それらの1成分を物体の1つの末端に向けて通し、別の成分を反対方向へ通すことを引き起こす。

ここで、我々は、抵抗にもかかわらず電流を引き起こし；1つの物体の両端に正反対の仕方、すなわち、起電力の作用によってのみ持続され、そして力が取り除かれるやいなや、1つの等価な反対の力で、物体に反対の電流を生じ、物体の最初の状態を蓄えるという傾向がある条件で、電気を生じる；そして最後に、もし十分に強ければ、化学物質をばらばらに引裂き、それらの成分を反対方向へ運ぶのに対し、それらの自然の傾向は結びつけることや反対方向に起電力を生じることのできる力と結びつくことあるという力の証拠を持つ。

そのとき、これは、電磁場を通じての運動、またはその場自体に起こる変化によって引き起こされる、物体に作用する力である；そして力の効果は、電流を生じて物体を熱めるか、または、物体をばらばらにするか、あるいは、そのどちらでもない時、その物体を電気分極の状態 — 制限のある状態、すなわち この状態では反対の末端が反対に電気を帯び、そして

<sup>4</sup>Experimental Researches, Series 19.

<sup>5</sup>Comptes Rendus(1856, second half year, p. 529, and 1857, first half year, p. 1209)

<sup>6</sup>Proceedings of the Royal Society, June 1856 and June 1861.

その状態で擾乱する力が取り除かれるやいなや、その物体がそれ自体を解放しようとするか、のいずれかである。

(10) 私が説明しようとする理論によれば、この "起電力" は、媒質の1部分から別の部分への運動の伝達の間働くように呼び出される力である。そして、この力を用いて一部分の運動が他の部分の運動を引き起こすものである。起電力が伝導回路に作用する時、それは電流を生じる。この起電力は、それが抵抗と出会う時、電子エネルギーを熱に連続的に変えることを引き起こす。熱は、任意の逆過程によって電子エネルギーの形に引き戻すことができない。

(11) しかし起電力が1つの誘電体に作用する時、その部分の分極状態を生じる。これは、磁石の影響下で、ある質量の鉄の部分が極性を配置するのに似ている、そして、どの粒子も反対の条件で反対の極を持つような1つの状態として記述することのできる、磁気分極のようなものである<sup>7</sup>。

起電力が作用の下にある誘電体において、一方が電氣的に正になり他方が負になるが、しかしその電気は全体的にその分子と結合したままであり、1つの分子から別の分子へ流れないように、各分子内の電気の変位することを我々は考えることができる。この作用の誘電体全体への影響は、ある方向に一般的な電気変位を生じることである。この変位は電流を生じない。なぜならそれがある値に達した時に、それは一定のままであるが、しかし、それが電流の開始であり、その変位が増加するかまたは減少するに応じて、その変化が正または負の方向に電流を生じるからである。誘電体の内部では、帯電を示すものはない。なぜなら、任意の分子の表面の帯電はそれと接触する分子の表面の反対の帯電によって中和されるからである；しかしその誘電体の境界面（帯電が中和されていない）では、我々は正または負の帯電を示す現象を見いだす。

起電力とそれを生み出す電気変位量の間関係は、誘電体の性質（すなわち、同じ起電力が空気中よりガラスまたはサルファーのような固体の誘電体中で一般により大きな電気変位を生み出す）に依存する。

(12) それから、ここで、我々は起電力のもう1つ別の効果、すなわち、電気変位を読み取る。これは我々の理論によれば、連結の完全剛性の欠如のせいで構造や器械に起こるものと似た、力の作用に対する一種の弾性的な柔軟性である。

(13) 誘電体の誘導容量の実験的な研究は、2つの邪魔する現象のために困難にさらされる。第1は、誘電体の伝導である。これは、多くの場合に極端に小さいのだけれども、まったく感知できないというものではない。第2は、電氣的吸収<sup>8</sup>と呼ばれる現象である。これのおかげで、誘電体が起電力にさらされる時、電気変位は徐々に増加する。そして、起電力が取り除かれる時に、誘電体は瞬間的に最初の状態に戻るが、単に帯電の部分を放電するだけである。そして、それ自体に留まる時には、内部は徐々に分極を減らすように、徐々に表面に帯電する。ほとんどすべての固体誘電体はこの現象を示す。これはライデン (Leyden) 瓶に残留電荷をもたらし、F. ジェンキン (Jenkin) 氏<sup>9</sup>により記述されたいくつかの電線の現象を引き起こす。

(14) 我々は、完全に弾性的な物体と比較した完全な誘電体の柔軟性に加えて、2つの他の種類の柔軟性を持つ。伝導による柔軟性は、粘性流体（すなわち、内部抵抗を持つ流体）

<sup>7</sup>Faraday, Exp. Res. Series XI.; Mossotti, Mem. della Soc. Italiana (Modena), vol. xxiv. part 2. p. 49.

<sup>8</sup>Faraday, Exp. Res. 1233-1250.

<sup>9</sup>Reports of British Association, 1850, p. 248; and Report of Committee of Board of Trade on Submarine Cables, pp. 136&464.

か、あるいは、柔らかい固体（この上で最小の力がその力が働いている時間で増大する永久的な形態変形を生じる）の柔軟性と比較できる。電気的吸収による柔軟性は、空洞内の濃い流体を含む細胞的な弾性体の柔軟性と比較できる。そのような物体は、圧力にさらされると、濃い流体のゆっくりとした柔軟性のせいで徐々に圧縮される；そして圧力が取り除かれた時、元の形に戻らない。なぜなら、その物体の物質弾性が完全な平衡を取り戻す前にその流体の粘性を徐々に超えなくてはならないからである。

我々が仮定したような構造が見られないいくつかの固体物体は、この種の力学的性質を持つように見える<sup>10</sup>；そして、同じ物質が、もし誘電体であれば、類似の電気的性質を持ち、もし磁気的であれば、磁気分極の獲得や保持や損失に関係する、対応する性質を持つことができるという見込みがある。

(15) それゆえ、電気と磁気における確かな現象は、光学現象と同じ結論を導くことは明らかである：すなわち、すべての物体に充満し、それらの存在によって大きさだけが変化するエーテル媒質がある；この媒質の部分部分は電流と磁石により運動状態に置かれる性質がある：この運動は、それらの部分の結合から生じる力によって媒質の一つの部分から他の部分に伝達される；これらの力の作用の下でこれらの連結の弾性に依存するある柔軟性がある；それゆえ、媒質には2つの異なる形のエネルギーが存在する、すなわち、1つの形態はその部分の実際の運動エネルギーであり、もう1つの形態はそれらの弾性のために、連結に蓄えられる位置エネルギーである。

(16) このようにして、その時、我々は、非常に多様な運動の性質を持つが、同時に一部の運動が定まった関係に従って他の部分の運動に依存する。これらの運動は、それらの弾性のおかげで、連結した部分の相対的な変位から生じる力によって伝達されるように結びついた、複雑なメカニズムの概念に導かれる。そのようなメカニズムは「動力学」の一般的法則に左右されなくてはならない。そしてもし我々が部分の運動の間の関係の形式を知るのであれば、我々はその運動の全ての結論を解決できるべきである。

(17) 伝導回路内で電流が流れる時、場の近接部は、ある磁気的性質によって特徴づけられ、もし場の中に2つの電流があれば、2つの電流による場の磁気的性質は結びつくことを我々は知っている。こうして、場のそれぞれの部分は両方の電流と結びつき、2つの電流は磁場との結びつきのためにお互いに結びつく。私が調べたいと思うこの連結の最初の結果は、1つの電流の別の電流や場の中の導体運動による誘導である。

これから導かれる第2の結果は、電流を運ぶ導体間の力学的な作用である。電流誘導の現象は、ヘルムホルツ (Helmholtz)<sup>11</sup>とトムソン (Thomson)<sup>12</sup>によって、力学的作用から導かれた。私は逆の順序に従って、誘導の法則から力学的作用を導いた。それから私はこれらの現象が依存する物理量  $L$ 、 $M$ 、 $N$  を決定する実験方法を記述した。

(18) それから、私は、電流誘導と電流引力の現象を電磁場の探求と磁気的性質を示す磁力線の系の基礎づけに応用する。1つの磁石で同じ場を探求することによって、私は力線を直角に切る磁気的等ポテンシャル面の分布を示す。

記号的な計算の威力の範囲内でこれらの結果をもたらすために、そこで私はそれらを「電磁場の一般的な方程式」の形式で表す。これらの方程式は以下のことを表現している—

<sup>10</sup>例えば、のりや糖蜜などの合成のようなもの。これから、小さな可塑性の人形が作られ、変形の後に徐々にそれらの形を回復する。

<sup>11</sup>"Conservation of Force", Physical Society of Berlin, 1847; and Taylor's Scientific Memoirs, 1853, p. 114.

<sup>12</sup>Reports of the British Association, 1848; Philosophical Magazine, Dec. 1851.

- (A) 電気変位と真の伝導と全電流（両方の合成）との関係。
- (B) すでに誘導の法則から導かれたような、磁力線と回路の誘導係数との関係。
- (C) 電磁測定系に応じて、電流の強さとその磁気効果との関係。
- (D) 場の中の物体運動、場それ自体の変化、および場の一部分から他の部分での電位 (electric potential) の変化から生じるような、物体内の起電力の値。
- (E) 電気変位とそれを生み出す起電力との関係。
- (F) 電流とそれを生み出す起電力との関係。
- (G) 任意の点での自由電気量とその近傍における電気変位との関係。
- (H) 自由電気の増加または減少とその近傍の電流との関係。

これらの 20 の変化量を含む方程式は全部で 20 ある。

(19) それから、私は、これらの量の言葉で、どの地点でも部分的に磁気分極、部分的に電気分極に依存するように、「電磁場」の内在的エネルギーを表現する。

このことから、私は力学的力を決定する。第 1 に、電流の流れる運動導体に働くもの；第 2 に、磁極に働くもの；第 3 に、帯電物体に働くものである。

最後の結果、すなわち、帯電物体に作用する力学的力は、静電効果に基づいた、独立な電氣的測定法を提供する。2つの方法で採用された単位の間関係は、私が媒質の“電氣的弾性”と呼んだものに依存すること及び、MM. ウェーバー (Weber) とコールラウシュ (Kohlrausch) によって実験的に決定された速度であることが示される。

それから、私はコンデンサーの静電容量と誘電体の特性誘導容量の計算方法を示す。

異なる、電気抵抗と誘導容量の物質の平行層からなるコンデンサーの場合が次に調べられる。そして、電氣的吸収と呼ばれる現象が一般的に生じるだろう。すなわち、コンデンサーが、突然に放電させられ時、短時間の後に「残留」電荷の痕跡を示すだろうということが示される。

(20) 次に一般的な方程式が伝導のない場を伝播する磁氣的擾乱の場合に応用される。そして、非常に伝播しやすい唯一の擾乱は、伝播の方向に垂直な擾乱であること、そしてその伝播速度がウェーバー (Weber) の実験のような実験から見いだされた速度  $v$  であるということが示される。それは 1 電磁単位に含まれる電気の静電単位数を表している。

この速度はほとんど光の速度であるので、我々は、光それ自体（放射熱やもしあれば他の放射も含む）が電磁法則に従った電磁場を通して伝播した波の形における電磁擾乱であると結論する強い理由があるように見える。もしそうなら、発光性の振動の素早い変化から計算されるような媒質の弾性と電気実験のゆっくりした過程によって見いだされるような媒質の弾性の間の一致は、媒質の弾性的性質が、空気より濃い任意の物質で邪魔されない時には、どれほど完全に規則的でなくてはならないかということを示している。もし弾性の同じ特徴が透明の濃い媒質で保持されるのなら、屈折率の 2 乗が特性誘電容量と特性磁気容量の積に等しいということが明らかとなる。導体媒質はそのような放射を素早く吸収し、それゆえ一般的に不透明になることが示される。

普通のもの（縦波）を除外して横波の磁気擾乱の伝播という着想は、ファラデー (Faraday) 教授<sup>13</sup>によって彼の「光線振動に関する考察」にはっきりと述べられた。光の電磁場理論は、彼によって提案されたように、1846年には伝播速度を計算するデータがなかったことを除けば、私がこの論文で発展させ始めたものと実質的には同じものである。

<sup>13</sup>Philosophical Magazine, May 1840, or Experimental Researches, iii. p. 447.

(21) それから、一般的な方程式は2つの円電流の相互誘導の係数と1つのコイルの自己誘導係数の計算に応用される。電流の開始期で電線の断面の異なる部分における電流の一様性の欠如が研究される。私はこれが最初のものとする。そして、その結果として起こる、自己誘導係数の補正が見いだされる。

これらの結果が電気抵抗標準に関する、英国協会の委員会の実験で使われたコイルの自己誘導の計算に応用される。そして、その値がその実験から導かれた値と比較される。

## 2. 第2部 — 電磁誘導について

2.1. 電流の電磁運動量. (22) 我々は電流の近傍における場の状態を考えることで始められる。我々は、磁力が磁場中で励起されることを知っている。磁力の方向と大きさは既知の法則に従って電流を運ぶ導体の形状に依存する。電流の強さが増加する時、すべての磁気的效果は同じ割合で増加する。さて、もし場の磁気状態が媒質の運動に依存するのなら、これらの運動を増加させたり減少させるようにある力が働かなくてはならない。そして、運動が励起されるとその運動が続くので、電流とそれを取り巻く電磁場の結合の効果は、ちょうど機械の駆動点と弾み車の結合がその駆動点に付加された運動量（駆動点に還元された弾み車の運動量（勢い）と呼ばれるかもしれない）を受けけるように、電流に一種の運動量を受けけることである。駆動点に働く不均衡な力はこの運動量を増大させ、その増加率で測られる。

電流の場合では、強度の突然の増大または減少への抵抗力が厳密に運動量効果のような効果を生み出すが、この運動量の量は導体の形状異なる部分の相対的位置に依存する。

2.2. 2つの電流の相互作用. (23) もし場の中に2つの電流があれば、任意の点での磁力は、各電流による力が別々に合成されたものである。そして、2つの電流は場のすべての点に関連しているのだらう、それらはお互いに関連しているのだらう。それゆえ、1つの電流のどんな増加または減少ももう1つの電流といっしょに作用する力または反対に作用する力を生じらう。

2.3. 縮小運動量の動力的例証. (24) 動力的例証の1つとして、物体  $C$  が2つの独立な駆動点  $A$  と  $B$  と、その速度が  $A$  の速度の  $p$  倍と  $B$  の速度の  $q$  倍が いっしょになった速度となるように関連していると仮定する。 $u$  を  $A$  の速度、 $v$  を  $B$  の速度、 $w$  を  $C$  の速度であるとしよう。そして、 $\delta x$ 、 $\delta y$ 、 $\delta z$  をそれらの瞬間の変位であるとしよう。それから、動力学の一般方程式<sup>14</sup>により、

$$C \frac{dw}{dt} \delta z = X \delta x + Y \delta y,$$

ここで  $X$  と  $Y$  は  $A$  と  $B$  で働く力である。

しかし、

$$\frac{dw}{dt} = p \frac{du}{dt} + q \frac{dv}{dt},$$

と

$$\delta z = p \delta x + q \delta y.$$

<sup>14</sup>Lagrange, Méc. Anal. ii. 2. § 5.

代入と  $\delta x$  と  $\delta y$  が独立であることを思いだして、

$$(1) \quad \begin{cases} X = \frac{d}{dt}(Cp^2u + Cpqv), \\ Y = \frac{d}{dt}(Cpqu + Cq^2v). \end{cases}$$

我々は  $Cp^2u + Cpqv$  を  $A$  に属する  $C$  の運動量と呼び、 $Cpqu + Cq^2v$  を  $B$  に属する  $C$  の運動量と呼ぶ；それから、我々は力  $X$  の効果が  $A$  に属する  $C$  の運動量を増加することであり、力  $Y$  の効果が  $B$  に属するその運動量を増加することであると言うことができる。

もし同様にして、しかし  $p$  と  $q$  の異なる値を持つように、 $A$  と  $B$  に連結したたくさんの物体があれば、

$$L = \sum(Cp^2), \quad M = \sum(Cpq), \quad N = \sum(Cq^2),$$

のように仮定することにより、我々はその問題を同じように扱うことができる。ここでその和は  $C$ 、 $p$ 、 $q$  の適切な値を持つすべての物体にわたってとられる。それから、 $A$  に属する系の運動量は、

$$Lu + Mv,$$

である。 $B$  に属するものは、

$$Mu + Nv,$$

である。そして、我々は

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{d}{dt}(Lu + Mv), \\ Y = \frac{d}{dt}(Mu + Nv). \end{cases}$$

を得るだろう。ここで、 $X$  と  $Y$  は  $A$  と  $B$  に作用する外力である。

(25) 例証をもっと完全にするために、我々は次のような仮定だけしておこう： $A$  の運動はその速度に比例する力により抵抗（我々が  $Ru$  と呼ぶ）を受ける。 $B$  の運動は、同様の力による抵抗（我々が  $Sv$  と呼ぶ）を受ける。ここで  $R$  と  $S$  は抵抗係数である。それから、もし  $\xi$  と  $\eta$  が  $A$  と  $B$  への力であれば、

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = X + Ru = Ru + \frac{d}{dt}(Lu + Mv), \\ \eta = Y + Sv = Sv + \frac{d}{dt}(Mu + Nv). \end{cases}$$

もし  $A$  の速度が比率  $\frac{du}{dt}$  で増加するのなら、 $B$  の運動を妨げるために力  $\eta = \frac{d}{dt}(Mu)$  がそれに適用されなくてはならない。

この  $A$  の速度の増加による  $B$  への効果は、ある電流への隣接する回路の強度の増加から生じる起電力に対応する。

この動力的例証は、力学における「縮小運動量 (reduced momentum)」によって意味されることを読者に理解してもらうための単なる補助と考えられる。「電磁運動量」または「電

気緊張状態 (Electotonic State)』と呼ばれる量の変化に依存するような、電流誘導の事実は、ファラデー (Faraday)<sup>15</sup>、フェリチ (Felici)<sup>16</sup>などの実験に基づく。

2.4. 2つの電流のための誘導係数. (26) 電磁場において、 $L$ 、 $M$ 、 $N$ の値は2つの電流による磁気効果の分布に依存する。そして、その分布は電流の形状と相対的位置にだけ依存する。ここに、 $L$ 、 $M$ 、 $N$ は電流の形状と相対的位置にだけ依存する量であり、導体の運動による変化に左右される。 $L$ 、 $M$ 、 $N$ は線の(つまり、空間内の1次元の)性質の幾何学量である； $L$ は第1の導体(我々が  $A$  と呼ぶ)の形状に依存する； $N$ は第2の導体(我々が  $B$  と呼ぶ)の形状に依存する。そして、 $M$ は  $A$  と  $B$  の相対的位置に依存する。

(27)  $\xi$ を  $A$  に作用する起電力、 $x$ を電流の強さ、 $R$ をその抵抗、それから  $Rx$ をその抵抗力としよう。定常電流では、起電力は抵抗力とちょうど釣り合うが、変動電流では、結果としての力は  $\xi = Rx$  が "電磁運動量" を増大するように働く。ここで運動量という言葉を使うのは、ある時間の間に働く力によって、すなわち物体内に存在する速度によってどれが生成されるかを表現するためである。

電流の場合には、作用する力は通常の力学的力ではない。少なくともまだ我々はそれを共通の力として測定できないのではなく、我々はそれを起電力と呼ぶ。そして動かされた物体は導体内の電気であるばかりか、何か導体の外側のものであり、電流を運ぶ近傍の他の導体によって影響を受ける性質がある。この場合は、それは、砲弾または管の中の水のような、単純な運動体の縮小運動量より、むしろ力学的連結で影響を受けるような、機械の駆動点の縮小運動量に似ている。

2.5. 2つの伝導回路の電磁気的關係. (28) 2つの伝導回路  $A$  と  $B$  の場合では、我々は  $A$  に属する電磁運動量が

$$Lx + My,$$

であり、 $B$  に属する電磁運動量が

$$Mx + Ny,$$

であると仮定する。ここで、 $L$ 、 $M$ 、 $N$ は動力的例証における量と同じ量である。ただし、導体  $A$  と  $B$  が動いた時にそれらが変化する性質があると仮定される点異なる。

それから、 $A$  における電流  $x$  の方程式は

$$(4) \quad \xi = Rx + \frac{d}{dt}(Lx + My),$$

そして、 $B$  における電流  $y$  の方程式は

$$(5) \quad \eta = Sy + \frac{d}{dt}(Mx + Ny),$$

であるだろう。ここで、それぞれ  $\xi$  と  $\eta$  は起電力であり、 $x$  と  $y$  は電流、そして  $R$  と  $S$  は  $A$  と  $B$  の抵抗である。

<sup>15</sup>Experimental Researches, Series I., IX.

<sup>16</sup>Annales de Chimie, sér. 3. xxxiv. (1852) p. 64.

2.6. 別の電流による電流誘導. (29) 第1の場合.  $A$  の作用から生じる起電力を除き、 $B$  にかかる起電力はないとしよう。そして、 $A$  の電流が0から値  $x$  に増加するとしよう。その時、

$$Sy + \frac{d}{dt}(Mx + Ny) = 0,$$

ここで、

$$(6) \quad Y = \int_0^t y dt = -\frac{M}{S}x,$$

すなわち、電気量  $Y$  は、全誘起電流であるが、 $x$  が0から  $x$  に上昇する時、 $B$  を流れるだろう。これは第1の導体内の電流変化による誘導である。 $M$  が正である時、第1電流の増加による誘導電流は負である。

2.7. 導体運動による誘導. (30) 第2の場合.  $x$  は一定のままであるとし、 $M$  は  $M$  から  $M'$  へ変化するとしよう。その時、

$$(7) \quad Y = -\frac{M' - M}{S}x;$$

それゆえ、もし  $M$  が増加するのなら、つまり、第1と第2の電流をお互いに接近させることによって増加するだろうという場合、負の誘導電流（すなわち、 $B$  を流れる全電気量が  $Y$  である）があるだろう。

これが第1と第2の導体の相対運動による誘導である。

2.8. 仕事とエネルギーの方程式. (31) 為された仕事と生成されたエネルギーの間の方程式を作るために、(1) に  $x$  を掛け、(2) に  $y$  を掛けて加えると、

$$(8) \quad \xi x + \eta y = Rx^2 + Sy^2 + x \frac{d}{dt}(Lx + My) + y \frac{d}{dt}(Mx + Ny).$$

ここで、 $\xi x$  は電流  $x$  に作用する起電力  $\xi$  によって単位時間あたりに為された仕事である。そして、 $\eta y$  は起電力  $\eta$  によって為された仕事である。それゆえ、その式の左辺は、単位時間あたりに起電力によって為された仕事である。

2.9. 電流で生成される熱. (32) 方程式の別の面に関して、最初に我々は

$$(9) \quad Rx^2 + Sy^2 = H,$$

を得る。これは、単位時間に回路の抵抗に打ち勝つために為された仕事を表す。これが熱に

変換する。残った項は熱に変換しない仕事を表す。それらは

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) + \frac{1}{2} \frac{dL}{dt} x^2 + \frac{dM}{dt} xy + \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} y^2$$

のように書くことができる。

2.10. 電流の内在的エネルギー。 ( 3 3 ) もし  $L$ 、 $M$ 、 $N$  が一定であれば、抵抗に抗して消費されない起電力の全仕事は電流の発達で占められるだろう。それゆえ、電流の全内在的エネルギーは

$$(10) \quad \frac{1}{2} Lx^2 + Mxy + \frac{1}{2} Ny^2 = E.$$

である。このエネルギーは、たぶん現実の運動としては、我々の感覚には感知できない形で存在する。この運動の座が単に伝導回路ばかりか、それらを取り巻く空間もある。

2.11. 導体間の力学的作用。 ( 3 4 ) 残っている項、

$$(11) \quad \frac{1}{2} \frac{dL}{dt} x^2 + \frac{dM}{dt} xy + \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} y^2 = W$$

は、 $L$ 、 $M$ 、 $N$  の変化、あるいは、同じことだが、導体  $A$  と  $B$  の形状と位置における変化から生じる、単位時間あたりの為された仕事である。

さて、もし物体が動かされて仕事が生じられるのなら、それが動く間にその物体に作用する通常の力学的力から生じなくてはならない。それゆえ、この部分の表式は、導体自体のどの部分も  $L$ 、 $M$ 、 $N$  が最も増加する方向に押し進める力学的力が存在することを示す。

それゆえ、電流を運ぶ導体間の電磁力の存在は、各電流の電磁場への合同および独立な作用の直接の帰結である。もし  $A$  と  $B$  が、 $M$  が  $M$  から  $M'$  まで増加し、その一方で電流が  $x$  と  $y$  であるように距離  $ds$  まで近づくことができるとするなら、為された仕事は

$$(M' - M)xy,$$

であるだろう。そして、 $ds$  の方向の力は

$$(12) \quad \frac{dM}{ds} xy,$$

である。そして、もし  $x$  と  $y$  が同符号であれば、そして、もし  $A$  と  $B$  が接近するにつれて  $M$  が増加するのなら、これは引力であるだろう。

それゆえ、もし我々が、(力学的アナロジーから) 我々が電磁運動量と呼ぶことのできる、電流の自己-永続的状态を生成しながら、抵抗を受けない起電力の部分がそれが作用する限り続くことを認め、そしてこの運動量が導体の外部の環境に依存することを認めるのなら、電流誘導と電磁引力の両方が力学的理由によって証明されるということが明らかになる。

私が電磁運動量と呼んだものは、ファラデー (Faraday)<sup>17</sup>によって回路の電気緊張状態と呼ばれた量と同じものである。この状態のどんな変化も、まさに運動量の変化が力学的力の作用を含むように、起電力の作用を含む。

それゆえ、もしファラデー (Faraday) によって彼の Experimental Researches の 9 番目のシリーズで述べられた現象が、電流についての唯一の既知の事実であったとしたら、電流を運ぶ導体の引力に関するアンペール (Ampère) の法則は、電流の相互誘導についてのファラデー (Faraday) の法則と同様に、数学的理由によって導き出されるかも知れない。

これらの結果を実験的証明の範囲内にもっていくために、次に私は、実験家が  $L$ 、 $M$ 、 $N$  の値を決定することができるように、1 電流の場合と、2 電流の場合と、電気天秤の 6 電流の場合を研究するつもりである。

2.12. 1 回路の場合. ( 3 5 ) 回路の抵抗が  $R$ 、自己誘導係数が  $L$  であり、起電力  $\xi$  が働いている回路内の電流  $x$  の方程式は、

$$(13) \quad \xi - Rx = \frac{d}{dt} Lx$$

である。  $\xi$  が一定の時、その解は

$$x = b + (a - b)e^{-\frac{R}{L}t},$$

の形である。ここで  $a$  は開始時の電流値、 $b$  は最後の値である。

時刻  $t$  に通る電気の総量は、ここで  $t$  は大きいものとして、

$$(14) \quad \int_0^t x dt = bt + (a - b) \frac{L}{R}$$

である。時間に関する  $x^2$  の積分値は、

$$(15) \quad \int_0^t x^2 dt = b^2 t + (a - b) \frac{L}{R} \left( \frac{3b + a}{2} \right).$$

実際の電流は、初期値  $a$  から最終値  $b$  へ徐々に変化する。しかし、 $x$  と  $x^2$  の積分値はあたかも強さ  $\frac{1}{2}(a + b)$  の定常電流が時間  $2\frac{L}{R}$  の間流れ、それから、定常電流  $b$  になったのと同じことである。一般的に  $2\frac{L}{R}$  はあまりに瞬時で 1 秒の端数である、だから検流計 (galvanometer) や電流力計 (dynamometer) への効果はあたかも衝撃が瞬間であるかのように計算される。

もし回路が 1 電池と 1 コイルからなるのであれば、回路が最初に完備した時、その効果があたかも電流が  $2\frac{L}{R}$  の間に単に最終強度の半分あるのと同じことである。誘導による、電流の減少はしばしば逆電流と呼ばれる。

( 3 6 ) もし抵抗  $r$  の細い電線に電流を無理やりに通すように、接続を切るような形で、付加抵抗  $r$  が突然に回路に加えられるのなら、初期電流が  $a = \frac{\xi}{R}$ 、終末電流が  $b = \frac{\xi}{R+r}$  となる。

<sup>17</sup>Experimental Researches, Series I. 60, & c.

その時、誘導電流は  $\frac{1}{2}\xi \frac{2R+r}{R(R+r)}$  であり、時間  $2\frac{L}{R+r}$  の間続く。この電流は、電池を2つの電線  $R$  と  $r$  に保持できるものより大きく、電線  $r$  を燃やすに十分である。

電線を空中に離して接続を切る時、この付加抵抗は間に介入した空気によって得られる。そして、新しい抵抗を横切る起電力が非常に大きくなるために、それを横切るように無理やり火花が起こるだろう。

もし起電力が、磁場中で回転するコイルの場合のように、 $E \sin pt$  の形であれば、その時

$$x = \frac{E}{\rho} \sin(pt - \alpha),$$

ここで  $\rho^2 = R^2 + L^2 p^2$ 、 $\tan \alpha = \frac{Lp}{R}$  である。

2.13. 2回路の場合。(37)  $R$  を第1の回路の抵抗、 $S$  を第2の回路の抵抗とし、誘導コイルの場合と類似の場合を持つとしよう。

電流の方程式は  $A$  と  $B$  と記されたものであり、ここで、我々は、導体運動がないので、 $L$ 、 $M$ 、 $N$  は定数であると仮定してよい。その時、方程式は

$$(13*) \quad \begin{cases} Rx + L \frac{dx}{dt} + M \frac{dy}{dt} = \xi, \\ Sy + M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

通過する電気の総量を見いだすために、我々はこれらの方程式を時間に関して積分だけではしなくてはならない；その時、もし  $x_0$ 、 $y_0$  が時刻0の電流の大きさであり、 $x_t$ 、 $y_t$  が時刻  $t$  の電流の大きさであれば、そしてもし  $X$ 、 $Y$  が時間  $t$  の間に各回路を流れる電気量であるとすれば、

$$(14*) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{R} \{ \xi t + L(x_0 - x_1) + M(y_0 - y_1) \}, \\ Y = \frac{1}{S} \{ M(x_0 - x_1) + N(y_0 - y_1) \}. \end{cases}$$

回路  $R$  が揃った時、 $t$  が大きい時、時刻  $t$  までの全電流は、

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\xi}{R}, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0;$$

とすることにより、

$$(15*) \quad X = x_1 \left( t - \frac{L}{R} \right), \quad Y = -\frac{M}{S} x_1.$$

のように得られる。

それゆえ、 $R$  内の逆電流の値は第2回路に独立である、そして第2回路の誘導電流は、コイル間の誘導係数  $M$  と第2コイルの抵抗  $S$  と  $R$  内の電流強度  $x_1$  のみに依存する。

起電力  $\xi$  が作用を止める時、第1回路に余分の電流が生じる。そして、第2回路に正の誘導電流が生じる。これらの値は接続で生じたものと等しいか反対である。

(38) 過渡電流の総量に関連する全ての疑問は、検流計の磁石に与えられた衝撃によって測定されるように、方程式の完全解を必要とすることなく、この方法で解くことができる。電流の熱効果とウェーバー (Weber) の電流力計のぶら下がったコイルに与える衝撃は、それが持ちこたえさせる短時間のどの瞬間でも電流の2乗に依存する。それゆえ、我々は方程式の解を得なくてはならない。そしてその解から、我々は検流計と電流力計の両方への影響を見いだすことができる；そしてそれから、どれが同じ効果を生み出すだろうか持ちこたえさせる間、我々は一様電流の強度と持続を見積もるためのウェーバー (Weber) の方法を用いることができる。

(39)  $n_1$  と  $n_2$  を方程式

$$(16) \quad (LN - M^2)n^2 + (RN + LS)n + RS = 0,$$

の解であるとする。そして、1次コイルが定起電力  $Rc$  で作用されているとしよう。だから  $c$  は保持できる定電流である；その時、接続のための方程式の完全解は

$$(17) \quad x = \frac{c}{S} \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} \left\{ \left( \frac{S}{n_1} + N \right) e^{n_1 t} - \left( \frac{S}{n_2} + N \right) e^{n_2 t} + S \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2} \right\},$$

$$(18) \quad y = \frac{cM}{S} \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} \{ e^{n_1 t} - e^{n_2 t} \}.$$

である。これらから、電流力計への衝撃を計算するために我々は

$$(19) \quad \int x^2 dt = c^2 \left\{ t - \frac{3L}{2R} - \frac{1}{2} \frac{M^2}{RN + LS} \right\},$$

$$(20) \quad \int y^2 dt = c^2 \frac{1}{2} \frac{M^2 R}{S(RN + LS)}.$$

を得る。

2次コイル内の電流の検流計と電流力計への影響は時間

$$2 \left( \frac{L}{R} + \frac{N}{S} \right)$$

の間、一様電流

$$-\frac{1}{2} c \frac{MR}{RN + LS}$$

のものと同じである。

(40) 仕事とエネルギーの間の方程式は簡単に証明される。起電力によって為された仕事は

$$\xi \int x dt = c^2 (Rt - L).$$

抵抗に打ち勝ち、熱を生成するのに為された仕事は

$$R \int x^2 dt + S \int y^2 dt = c^2 \left( Rt - \frac{3}{2}L \right).$$

系に残るエネルギーは

$$= \frac{1}{2}c^2L.$$

(41) もし電流  $c$  が流れている間に回路  $R$  が突然かつ完全に遮断されたとするなら、2次コイルの電流の方程式は

$$y = c \frac{M}{N} e^{-\frac{S}{N}t}$$

となるだろう。この電流は、 $c \frac{M}{N}$  の値で始まり、徐々に消滅する。

全電気量は  $c \frac{M}{S}$  であり、 $\int y^2 dt$  の値は  $c^2 \frac{M^2}{2SN}$  である。

検流計と電流計への影響は時間  $2 \frac{N}{S}$  の間定電流  $\frac{1}{2} c \frac{M}{N}$  のものに等しい。

それゆえ、加熱の効果は回路が接続している時の電流のものより大きい。

(42) もし  $\xi = E \cos pt$  の形の起電力が回路  $R$  に作用するのなら、その時、もし回路  $S$  が取り除かれるのなら、 $x$  の値は

$$x = \frac{E}{A} \sin(pt - \alpha),$$

のようになるだろう。ここで

$$A^2 = R^2 + L^2 p^2,$$

$$\tan \alpha = \frac{Lp}{R}.$$

$S$  が存在することによる近傍への効果は、 $A$  と  $\alpha$  の値を変えることである。その場合、もし  $R$  が

$$R + p^2 \frac{MS}{S^2 + p^2 N^2},$$

となり、 $L$  が

$$L - p^2 \frac{MN}{S^2 + p^2 N^2},$$

となるのであれば、それらの値はこれに応じて変化する。それゆえ、回路  $S$  の存在による影響は、回路  $R$  のみかけの抵抗を増加し、みかけの自己誘導を減少させることである。

2.14. 電気天秤による誘導係数の決定について. (43) 電気天秤 (electric balance) は4点  $ACDE$  を2つずつ繋いだ6つの導体で構成されている。

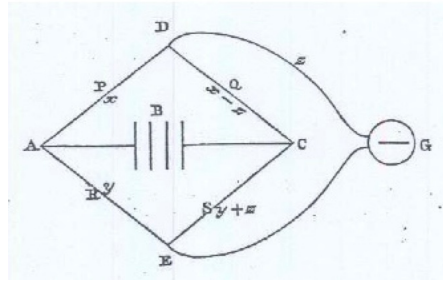


FIGURE 1. 電気天秤の電気回路

これらの点の1組  $AC$  は、電池  $B$  で繋がれている。反対の組  $DE$  は検流計  $G$  で繋がれている。その時、もし4つの残る導体の抵抗が  $P, Q, R, S$  によって表され、そしてそれらの中の電流が  $x, x-z, y, y+z$  により表されるなら、 $G$  を通る電流が  $z$  になるだろう。その4点の電位を  $A, C, D, E$  としよう。その時、定常電流の条件は以下の式から見いだされる：

$$(21) \quad \begin{cases} Px = A - D, & Q(x - z) = D - C, \\ Ry = A - E, & S(y + z) = E - C, \\ Gz = D - E, & B(x + y) = -A + C + F. \end{cases}$$

これらの方程式を  $z$  について解くと、我々は

$$(22) \quad z \left\{ \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{1}{S} + B \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{1}{Q} + \frac{1}{S} \right) + G \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \right) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{S} \right) \right\} \\ + z \left\{ \frac{BG}{PQRS} (P + Q + R + S) \right\} = F \left( \frac{1}{PS} - \frac{1}{QR} \right)$$

を得る。

この表式において、 $F$  は電池の起電力、 $z$  は定常になった時の検流計を通る電流である。 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  は4つの腕の部分の抵抗である。 $B$  は電池と電極の抵抗であり、 $G$  は検流計の抵抗である。

(44) もし  $PS = QR$  なら、 $z = 0$  である。だから定常電流はないだろう。しかし、回路を繋ぐか切るかすると誘導のせいで検流計を通る過渡電流が生成されることはあり得る。そして、我々が起こる作用を理解していると仮定してのことだが、検流計の表示は誘導係数を決定するために使用され得る。

我々は  $PS = QR$  と仮定するつもりなので、十分な時間がある時には電流  $z$  は消滅する。そして

$$(23) \quad x(P+Q) = y(R+S) = \frac{F(P+Q)(R+S)}{(P+Q)(R+S) + (B(P+Q))(R+S)}.$$

$P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  の間の誘導係数が以下の表で、 $P$  の自身への誘導係数が  $p$ 、 $P$  と  $Q$  の間の誘導係数が  $h$  などと与えられているとしよう。

TABLE 1. 自己誘導係数と相互誘導係数

	$P$	$Q$	$R$	$S$
$P$	$p$	$h$	$k$	$l$
$Q$	$h$	$q$	$m$	$n$
$R$	$k$	$m$	$r$	$o$
$S$	$l$	$n$	$o$	$s$

検流計のそれ自身への誘導係数を  $g$  とする。そして、それが(それが  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  の針への直接的な作用を避けるためでなくてはならないように)  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  の誘導の影響から離れているものとしてしよう。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  を  $x$ 、 $y$ 、 $z$  の時間に関する積分であるとする。繋ぐと、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  はゼロである。ちょっと後で  $z$  は消滅するし、 $x$  と  $y$  は一定値になる。それゆえ、各導体のための方程式は

$$(24) \quad \begin{cases} PX + (p+h)x + (k+l)y = \int Adt - \int Ddt, \\ Q(X-Z) + (h+q)x + (m+n)y = \int Ddt - \int Cdt, \\ RY + (k+m)x + (r+o)y = \int Adt - \int Edt, \\ S(Y+Z) + (l+n)x + (o+s)y = \int Edt - \int Cdt, \\ GZ = \int Ddt - \int Edt. \end{cases}$$

のようになる。これらの方程式を  $Z$  について解くと、我々は

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z \left\{ \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{1}{S} + B \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{1}{Q} + \frac{1}{S} \right) + G \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \right) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{S} \right) \right\} \\ \quad + Z \left\{ \frac{BG}{PQRS} (P + Q + R + S) \right\} \\ = -F \frac{1}{PS} \left\{ \frac{p}{P} - \frac{q}{Q} - \frac{r}{R} + \frac{s}{S} + h \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) + k \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{P} \right) + l \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{Q} \right) \right\} \\ \quad - F \frac{1}{PS} \left\{ -m \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{S} \right) + n \left( \frac{1}{Q} - \frac{1}{S} \right) + o \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

を得る。

(45) さて、強度が  $Z$  である瞬間電流による検流計の振れを  $\alpha$  としよう。

1 の代わりに  $PS$  と  $QR$  の比を  $\rho$  にすることによって生成された永久振れを  $\theta$  としよう。

また検流計の針の静止から静止への振動時間を  $T$  としよう。

その時、量

$$(26) \quad \begin{aligned} & \frac{p}{P} - \frac{q}{Q} - \frac{r}{R} + \frac{s}{S} + h \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) + k \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{P} \right) + l \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{Q} \right) \\ & - m \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{S} \right) + n \left( \frac{1}{Q} - \frac{1}{S} \right) + o \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right) = \tau, \end{aligned}$$

と名付けると、我々は

$$(27) \quad \frac{Z}{z} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha T}{\tan \theta \pi} = \frac{\tau}{1 - \rho}$$

を得る。

$\tau$  を実験で決定する上で、1863 年の英国協会レポートにおけるジェンキン (Jenkin) 氏によって記述された配置を用いて、腕の部分の 1 つの抵抗を変化させるのが最良である。これにより、1 から 1.01 までの  $\rho$  の任意の値が正確に測定された。

我々は、検流計が回路内にある時や、回路がつながっている時や、永久電流を与えないようにうまく抵抗が調整されている時に、誘導の衝撃による最大の振れ ( $\alpha$ ) を観測する。

それから、我々は腕部分の 1 つの抵抗が 1 と  $\rho$  の比に増大する時、永久電流によって生成される最大の振れ ( $\beta$ ) を観測する。この時、電池と接続が行なわれた後のちょっとした間まで検流計は回路内にはない。

空気の抵抗の効果を消去すると、 $\rho$  はほとんど  $\beta = 2\alpha$  まで変化させるのが最良である；その時、

$$(28) \quad \tau = T \frac{1}{\pi} (1 - \rho) \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}{\tan \frac{1}{2} \beta}.$$

もし  $P$  を除くすべての天秤の腕が、あまり長くない、コイルになる前の 2 倍の長さの非常に優れた線の抵抗コイルでできているとすると、これらのコイルに属する誘導係数は鈍感に

なり、 $\tau$  は  $\frac{p}{P}$  に減少するだろう。それゆえ、電気天秤は抵抗値が分かっている任意の回路の自己誘導を測定する手段を提供する。

(46) それはまた、例えば、 $P$  と  $Q$  の間の誘導係数 (我々が  $m$  と呼んだ) のような、2つの回路の間の誘導係数を決定するのにも使える；しかし、天秤を使わずに、(37) のように、電流を直接に測定することによりこれを測定する方がもっと便利だろう。我々はまた、そこで誘導電流がないことから  $\frac{p}{P}$  と  $\frac{q}{Q}$  が等しいことを確かめることができる。そして、このようにして、我々が  $p$  の値を知る時、我々は振れの比較よりももっと完全な方法によって  $q$  の値を決定することができる。

2.15. 電磁場の探求. (47) さて、1次回路  $A$  を不変の形状であると仮定しよう。そして、我々が形状も位置も変化できると仮定する、2次回路  $B$  を用いて電磁場を探求しよう。

我々は、 $B$  を端のある短い直線の導体からなると仮定することで始めることができる。ここで、この両端は、2つの平行な伝導レールの上を滑る。レールは滑る部分からある距離で接続されている。

その時、もし可動導体を与えられた方向へ滑らせることが  $M$  の値を増加させるのなら、滑る部品の運動の間に  $B$  の負の電流を生じるように、負の起電力が回路  $B$  内に作用するだろう。

もし電流が回路  $B$  内に保たれているのであれば、滑る部品はそれ自体がその方向に動くようになるだろう。これが  $M$  を増大させる。その場のどの点においても、たとえどの方向に両端が向きを変えたとしても、その方向に動かされた導体がどんな起電力も感じないような、ある方向がいつも存在するだろう。電流を運ぶ導体はそれをその方向またはその反対方向へ押す力学的力を感じないだろう。

この方向はその点を通る磁力線の方とと呼ばれる。

そのような磁力線を横切る導体運動は、磁力線と運動方向に垂直な方向に起電力を生じる。そして、電流を運ぶ導体は磁力線と電流の方向に垂直な方向に押される。

(48) 次に我々は  $B$  を任意の位置に置くことができ、どんな方向へもその平面の向きを変えることのできる、非常に小さな平面回路から成ると仮定する。 $M$  の値は回路の面が磁力線に垂直の時に最大となるだろう。それゆえ、もし電流が  $B$  に維持されるのなら、それはそれ自体をこの位置に置くようになるだろう。そして、それ自体が、磁石のように、磁力の方向を示すだろう。

2.16. 磁力線について. (49) 任意の面が磁力線をよぎるように描かれているとしよう。そしてこの面上に任意の線体系が、お互いを切ることなく並ぶように小さな間隔で描かれているとしよう。次に、これらのすべての線をよぎるように、その面の上に任意の線が描かれているとする。そして、第2の線がその近くに描かれているとしよう。これら2つの線と第1の体系の線の間で囲まれた小さな空間の各々に対する  $M$  の値が1に等しくなるように、第1の線から距離をとって描かれる。

このようにして、第2の体系を形成するようにもっと多くの線が描かれているとしよう。それゆえ、2つの線の体系の交差によって形成されたどの網目に対しても、 $M$  の値が1であるとしよう。

最後に、これらの網目のどの交差点からも、場を歩いていつも磁力線の方向と一致する方向に1つの線が描かれているとしよう。

(50) このようにして、場全体は規則的な間隔で磁力線で一杯になるだろう。そして電磁場の性質はそれらによって完全に表現されるだろう。

なぜなら、第1に、もし任意の閉曲線が場の中に描かれるのなら、その曲線に対する  $M$  の値はその閉曲線を「通過する」磁力線の「数」によって表されるだろう。

第2に。もしこの曲線が伝導回路であり、その場の中を動かされるとするのなら、それはその曲線を通過する線の数の減少率により表される。その中に起電力が作用するだろう。

第3に。もし電流がその回路内に維持されるのなら、導体は、それを通る磁力線の数を増加するようにそれを動かそうとする力によって作用を受けるだろう。そして、これらの力によって為された力の総量は、回路内の電流掛ける余分の磁力線に等しくなる。

第4に。もし小さな平面回路が場の中に置かれ、向きを自由に取れるのであれば、それは面を磁力線に垂直に置くだろう。小さな磁石はそれ自体の軸を磁力線の方に置くだろう。

第5に。もし一様に磁化した長い棒が場に置かれるのなら、各極は磁力線の方に力の作用を受けるだろう。単位面積を通る磁力線の数は、単位極に作用する力とその媒質の磁氣的性質に依存する係数とをかけ算したものに等しい。そして、それは磁気誘導係数と呼ばれる。

流体や等方性固体では、この係数の値  $\mu$  は、その媒質を通る力線がどこを向いているにかかわらず同じである。しかし、結晶化し、歪みがあり、組織化した固体では、 $\mu$  の値は結晶軸や応力軸や成長軸に関して磁力線の方に依存する。

全ての物体で  $\mu$  は温度で影響を受ける。鉄では磁化の強度が増加するにつれてそれが消えるようになる。

2.17. 磁気等ポテンシャル面について。(51) もし我々が場を一様に磁化した棒で研究するのなら、極の1つが磁場の非常に弱い部分にある限り、場のそばを動くにつれて磁力はもう1つの極に仕事をこなうだろう。

もし我々が与えられた1点から出発し、そこから他の点へこの極を動かすのなら、為された仕事はその2つの点の間の極の経路に独立である；ここで電流がその極によって追跡された異なる経路の間を通らないと仮定している。

それゆえ、場の中に電流ではなく磁石だけがある時、我々は、それらの間で実行される経路が何であろうが、1つから別のものへ通る時に為された仕事が定数になるように、一連の面を描くことができる。そのような面は「等ポテンシャル面」と呼ばれる。そして、通常の場合では「磁力線」に垂直である。

もし単位極が任意の1つから次のものへ順番に通る時、単位仕事が為されるようにこれらの面が描かれるなら、磁極の1つの運動で為された仕事は、極の強度とそれが正の方向に通過した面の数とを掛けたものとして評価されるだろう。

(52) もし場の中に電流を運ぶ回路があれば、まだ電流を運ぶ導体の外部の場の部分に等ポテンシャル面があるだろう。しかし、あるものからもう1つのものへ通る時に単位極に為された仕事は、その極の経路がこれらの電流のどれかの周りを回る回数に依存するだろう。それゆえ、各面のポテンシャルは、場の中の1電流の周りを完全に回る時に為された仕事分だけ異なる、等差数列の一連の値を持つだろう。

等ポテンシャル面は連続的な閉局面ではないが、それらのあるものは電子回路内で共通端または境界として末端をなす、薄い面で縁取られている。これらの数は、電流の周りを進む単位極に為された仕事の量に等しい。そして、これは通常の測定により  $= 4\pi\gamma$  である。ここで、 $\gamma$  は電流の値である。

それゆえ、M. プラトー (Plateau) の実験で石鹸の泡が輪と接触するように、これらの面は電流と接触している。どの電流  $\gamma$  もそれに接触された  $4\pi\gamma$  の面を持つ。これらの面はそれらの共通端に対する電流を持ち、等角度でそれに出会う。他の部分における面の形は、それらが属する回路の形状と同様に、他の電流と磁石の存在にも依存する。

### 3. 第3部 — 電磁場の一般的方程式

(53) 空間に  $x, y, z$  軸として3つの直交する方向を仮定しよう。そして、向きを持つ全ての量はこれら3方向の成分によって表されるとしよう。

3.1. 電流  $(p, q, r)$ . (54) 電流は、ある物体の1部分から別の部分への電気伝導に存在する。 $x$  軸に垂直な単位面積を横切る単位時間内に伝送される電流量が、 $p$  と呼ばれるとしよう。その時、 $p$  はその面における  $x$  方向の電流成分である。

我々は文字  $p, q, r$  を  $x, y, z$  の方向の単位面積あたりの電流成分を表すために使うつもりである。

3.2. 電気変位  $(f, g, h)$ . (55) 電気変位は、物体の分子または粒子の両側の反対の帯電に存在する。これはその物体を通る伝導を伴ってなくても良い。その物体から切り取られた体素  $dx, dy, dz$  の面  $dy \cdot dz$  上に現われるだろう電流量を  $f \cdot dy \cdot dz$  とする。その時、 $f$  は  $x$  に平行な電気変位の成分である。我々は、それぞれ  $f, g, h$  を  $x, y, z$  に平行な電気変位を示すために使うつもりである。

電気変位の変化は電気的全運動 (我々は  $p', q', r'$  と呼ぶ) を得るために  $p, q, r$  に加えられなくてはならない。それゆえ、

$$(A) \quad \begin{cases} p' = p + \frac{df}{dt}, \\ q' = q + \frac{dg}{dt}, \\ r' = r + \frac{dh}{dt}. \end{cases}$$

3.3. 起電力  $(P, Q, R)$ . (56)  $P, Q, R$  を任意の点での起電力の成分を表すとしよう。その時、 $P$  は与えられた点で  $x$  方向に置かれた導体内の単位長あたりの電位差を表す。我々は、1つの無限に短い電線が、任意の点で  $x$  に平行に置かれ、力  $P$  の作用の間、2つの小さな導体で接続され、それから2つの導体は絶縁され、起電力の影響を取り除かれると仮定することができる。それから、 $P$  の値は導体の電荷を測定することにより確かめられる。

こうして、もし  $l$  がその電線の長さであるとするなら、その両端での電位差は  $Pl$  となるだろう。そしてもし  $C$  が小さな導体のそれぞれの静電容量であるとするなら、それぞれの上の電荷は  $\frac{1}{2}CPl$  となるだろう。電磁気系で測定される、控えめな大きさの導体の静電容量は極度に小さいので、電磁作用から生じる通常の起電力はこのようにして測定されることはめったにない。實際上、そのような測定は、いつも閉回路またはほとんど閉回路を形成する長い導体で行なわれる。

3.4. 電磁運動量 ( $F, G, H$ ). (57)  $F, G, H$  を磁石または電流の任意の系による磁場の任意の点での電磁運動量の成分としよう。

その時、 $F$  は、磁場からこれらの磁石または電流を取り除くことで生じるだろう、 $x$  方向における電磁運動量の全衝撃であるとしよう。すなわち、もし  $P$  が系を取り除く間の任意の瞬間の起電力であるのなら、

$$F = \int P dt.$$

それゆえ、磁場中の磁石または電流の運動に依存する起電力の部分は

$$(29) \quad P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}.$$

である。

3.5. 回路の電磁運動量. (58)  $s$  を回路の長さとしよう。その時、もし我々がその回路の周りで

$$(30) \quad \int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds$$

の積分を行うのなら、我々は回路の全電磁運動量、あるいは、回路を通る磁力線の数を得るだろう。その磁力線の変化がその回路内の全起電力の目安になる。この電磁運動量はファラデー (Faraday) 教授が「電気緊張状態」の名前を適用したのと同じものである。

もしその回路が面素  $dydz$  の境界であるとするのなら、電磁運動量は

$$\left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dydz$$

である。そして、これは面積  $dydz$  を通る磁力線の数である。

3.6. 磁力 ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). (59)  $\alpha, \beta, \gamma$  は、与えられた任意の点に置かれた単位磁極に働く力の  $x, y, z$  方向に分解された成分を表すとしよう。

3.7. 磁気誘導係数 ( $\mu$ ). (60)  $\mu$  を等しい磁化力の下での、与えられた媒質中の磁気誘導と空気中の磁気誘導の比としよう。それから、 $x$  に垂直な単位面積内の磁力線の数を  $\mu\alpha$  としよう。( $\mu$  は媒質の性質、温度、すでに生成された磁化の量や結晶物体中でその方向に変化などに依存する量である。)

(61) この記号において3つの軸に垂直な小さな回路の電気運動量 (electric momentum) を表すと、我々は次のもの得る

磁力の方程式

$$(B) \quad \begin{cases} \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{cases}$$

3.8. 電流の方程式. (62) 実験から、閉回路内の電磁場における磁極の運動は、もしその極が記述する回路が電流の周りを回らないならば、仕事を生じないことが知られている。それゆえ、電流で占有された空間内を除き、

$$(31) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\varphi,$$

磁気ポテンシャル  $\varphi$  の完全微分である。

量  $\varphi$  は、探る点がコース内の電流の周りを通る回数に応じて無限個の異なる値を許容する。ここで、強度  $c$  の電流を完全に周る通過に対応して  $\varphi$  の連なる値の間の差は  $4\pi c$  である。それゆえ、もし電流がなければ、

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0;$$

しかし、もし電流  $p'$  があれば、

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p', \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q', \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r'. \end{cases}$$

我々はこれらを「電流方程式」と呼ぶことができる。

3.9. 回路内の起電力. (63)  $\xi$  を回路  $A$  の周りで作用する起電力であるとしよう。その時、

$$(32) \quad \xi = \int \left( P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds$$

ここで、 $ds$  は線素、積分はその回路の周囲で行なわれる。

場中の力を回路  $A$  と  $B$  による力であるとしよう。その時、 $A$  の電磁運動量は

$$(33) \quad \int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds = Lu + Mv,$$

ここで  $u$  と  $v$  は  $A$  と  $B$  内の電流である。そして、

$$(34) \quad \xi = -\frac{d}{dt}(Lu + Mv).$$

それゆえ、回路  $A$  の運動がなければ、

$$(35) \quad \begin{cases} P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}, \end{cases}$$

ここで、 $\Psi$  は  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$  の関数である。この関数は上の方程式の解に関する限り不確定である。なぜならそれに依存する項がその回路の周りで積分すると消滅するからである。しかしながら、量  $\Psi$  は、我々が問題の実際の条件を知っている時、任意の特別な場合にいつも決定される。 $\Psi$  の物理的解釈は、それが空間の各点での「電位」を表す。

3.10. 運動する導体に働く起電力. (64)  $x$  軸に平行な、長さ  $a$  の短い直線導体が、成分が  $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ 、 $\frac{dz}{dt}$  である速度で動くとしよう。そして、その両端が2つの平行な導体に沿って速度  $\frac{ds}{dt}$  で滑るとしよう。この配置が一部を形成する回路の電磁運動量の変化を見いだそう。

単位時間内に、運動する導体は3つの軸の方向に沿って距離  $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ 、 $\frac{dz}{dt}$  進む。そして同時に回路内に含まれた平行な導体の長さはそれぞれ  $\frac{ds}{dt}$  で増加した。

それゆえ、量

$$\int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds$$

は次のような増分で増加するだろう:

導体運動による、

$$a \left( \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dt} \right),$$

回路が長くなることによる、

$$-a \frac{ds}{dt} \left( \frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dx} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dx} \frac{dz}{ds} \right).$$

それゆえ、全増分は

$$a \left( \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} \right) \frac{dy}{dt} - a \left( \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} \right) \frac{dz}{dt};$$

または、「磁力」の方程式 (8) により、

$$-a \left( \mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt} \right).$$

もし  $P$  が  $x$  に平行に動く導体内の、単位長あたりの起電力であれば、実際の起電力は  $Pa$  である；これは回路の電磁運動量の減少によって測定されるので、運動による起電力は

$$(36) \quad P = \mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt}$$

であるだろう。

(65) さて、運動する導体の起電力の完全な方程式は次のように書かれる：—

起電力の方程式

$$(D) \quad \begin{cases} P = \mu \left( \gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q = \mu \left( \alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R = \mu \left( \beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}. \end{cases}$$

それぞれの式の右辺第1項は、導体それ自体の運動による起電力を表す。この起電力は運動の方向と磁力線に垂直である；そして平行四辺形の辺が場のその点の導体の速度と磁気誘導の方向と大きさを表すように描かれているのなら、平行四辺形の面積は導体の運動による起電力を表す。そしてその力の方向はその平行四辺形に垂直である。

それぞれの式の第2項は、場の中の磁石と電流の位置または強度の変化の効果を示す。

第3項は、電位  $\Psi$  の効果を示す。それは閉回路内に循環する電流を生み出す効果はない。それは場の中のある定まった点に、または、点から電気を押し進める力の存在を示す。

3.11. 電気弾性. (66) 起電力が誘電体に作用する時、起電力は誘電体のあらゆる部分を分極条件に持っていく。この分極条件では反対側に反対電荷がやどる。この帯電量は、起電力や媒質の性質に依存し、そして、軸により定義される構造を持つ固体内では、これらの軸に関する起電力の比に依存する。等方的な媒質中では、もし  $k$  が起電力と電気変位の比であれば、我々は

電気弾性<sup>18</sup>の方程式

<sup>18</sup>訳者注：「電気弾性」とは、誘電率のことである。

$$(E) \quad \begin{cases} P = kf, \\ Q = kg, \\ R = kh. \end{cases}$$

のように書くことができる。

3.12. 電気抵抗. (67) 起電力が導体に作用する時、起電力はそれを通る電流を生じる。この効果はすでに考えられた電気変位に加えられる。複雑な構造の固体では、起電力と電流の関係は固体にわたりその方向に依存する。等方な媒質（ここでは我々はこの場合だけを考えるつもりである）では、もし  $\rho$  が単位体積あたりの比抵抗であれば、我々は

電気抵抗の方程式

$$(F) \quad \begin{cases} P = -\rho f, \\ Q = -\rho g, \\ R = -\rho h. \end{cases}$$

のように書くことができる。

3.13. 電気量. (68)  $e$  を場の任意の部分で単位体積に含まれる自由な正電気の量を表すでしょう。その時、これがお互いに中和しないように場の異なる部分の帯電から生じるので、我々は

電気抵抗の方程式

$$(G) \quad e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0.$$

のように書くことができる。

(69) もし媒質が電気を流すのなら、我々は別の条件を持つだろう。それは流体力学におけるように、

連続の方程式

$$(H) \quad \frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0.$$

と呼ばれる。

(70) 電磁場のこれらの方程式では、我々は20の変数を仮定した。すなわち、

電磁運動量に対して	.....	$F$	$G$	$H$
磁場の強度に対して	.....	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
起電力に対して	.....	$P$	$Q$	$R$
実伝導による電流に対して	.....	$p$	$q$	$r$
電気変位に対して	.....	$f$	$g$	$h$
全電流（変位変化を含む）に対して	.....	$p'$	$q'$	$r'$
自由電気量に対して	.....	$e$		

電位に対して	..... $\Psi$
これら 20 の量の間で、我々は 20 の方程式を見いだした、すなわち、	
3 つの磁力方程式	..... (B)
3 つの電流方程式	..... (C)
3 つの起電力方程式	..... (D)
3 つの電気弾性方程式	..... (E)
3 つの電気抵抗方程式	..... (F)
3 つの全電流方程式	..... (A)
1 つの自由電気方程式	..... (G)
1 つの連続方程式	..... (H)

それゆえ、これらの方程式は、我々が問題の条件を知っていると仮定して、それらに起こる全ての方程式を決定するのに十分である。しかしながら、多くの問題では、そのうちの 2、3 の方程式が必要とされる。

3.14. 電磁場の内在的エネルギー. (71) 我々は (33) で、任意の電流系の内在的エネルギーは、各回路内の電流の半分をその電磁運動量にかけることで見いだされることを見た。これは、電流で占められた全空間にわたる、積分

$$(37) \quad E = \frac{1}{2} \sum (Fp' + Gq' + Hr') dV,$$

を見いだすことと等価である。ここで  $p, q, r$  は電流成分であり、 $F, G, H$  は電磁運動量成分である。

「電流」の方程式 (C) から  $p', q', r'$  を代入して、これは

$$\frac{1}{8\pi} \sum \left\{ F \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right\} dV$$

となる。

部分積分と  $\alpha, \beta, \gamma$  が無限遠でゼロになることから、その表式は

$$\frac{1}{8\pi} \sum \left\{ \alpha \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right\} dV,$$

となる。ここで、積分は全空間に拡張されている。(61) の「磁力」の方程式 (B) を参照して、これは

$$(38) \quad E = \frac{1}{8\pi} \sum \{ \alpha \cdot \mu\alpha + \beta \cdot \mu\beta + \gamma \cdot \mu\gamma \} dV,$$

となる。ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$  は磁気強度の成分または単位磁極に働く力の成分である。 $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$  は磁気誘導量の成分または単位面積内の力線の数の成分である。

等方的媒質では、 $\mu$  の値は全ての方向で同じである。そして、我々はその結果をもっと簡単に表現できる。磁化から生じる磁場の任意の部分の内在的エネルギーは、単位体積あたり

$$\frac{\mu}{8\pi} I^2,$$

であるからである。ここで  $I$  は磁場強度である。

(72) エネルギーは場の中に異なる方法で、すなわち、電気変位を生じる起電力の作用によって、蓄えられ得る。可変変位  $f$  を生成する中で、可変起電力  $P$  によって為された仕事は、

$$\int P df$$

を  $P = 0$  から  $P$  の任意の値まで積分することによって得られる。

方程式 ( $E$ )、 $P = kf$  なので、この量は

$$\int k f df = \frac{1}{2} k f^2 = \frac{1}{2} P f$$

となる。

ここに、場のどの部分の内在的エネルギーも、電気変位の形式で現われるように、

$$\frac{1}{2} \sum (P f + Q g + R h) dV$$

となる。

それゆえ、場に存在する全エネルギーは

$$(I) \quad E = \sum \left\{ \frac{1}{8\pi} (\alpha\mu\alpha + \beta\mu\beta + \gamma\mu\gamma) + \frac{1}{2} (P f + Q g + R h) \right\} dV$$

のようになる。

この表式の第1項は、場の磁化に依存し、そして我々の理論上、ある種の実際の運動によって説明される。第2項は、場の電気分極に依存し、そして我々の理論上、弾性媒質内のある種の歪みによって説明される。

(73) 前の機会<sup>19</sup>で、私はその現象を説明しようと用意された、特別な種類の運動と特別な種類の歪みを記述することを試みた。本論文では、私はこの種の仮説を避ける；そして電流誘導と誘電分極の既知の現象に関して電気運動量と電気弾性のような言葉を使用して、私は単に電氣的現象を理解する上で役立つ力学的現象に読者の心を向けさせたいと思う。本論文では、そのような全ての言葉は注釈としてではなく、実例として考えられるべきである。

(74) しかしながら、場の「エネルギー」のことをいえば、私は文字通りに理解されるべきであると思う。あらゆるエネルギーは、運動形態で、または弾性形態で、またはどんな他の形態で存在しようと、力学的エネルギーと同じものである。電磁現象におけるエネルギー

<sup>19</sup> "On Physical Lines of Force", Philosophical Magazine, 1861-62.

は力学的エネルギーである。唯一の疑問は、「どこに」それが存在するのか？ということである。古い理論では、それは、位置エネルギー、あるいは、離れたところである効果を生む力と呼ばれた未知の量の形態で、帯電物体や伝導回路や磁石の中にある。我々の理論では、それは、その物体それ自体の中と同様に、電磁場中、そして帯電物体や磁気物体を取り巻く空間にあり、そして、2つの異なる形態をとる。すなわち、場の「エネルギー」は、仮説を設けることなく、磁気分極と電気分極として、あるいは、非常にもっともらしい仮説に従って、ある媒質や同じ媒質の運動や歪みとして記述できる。

(75) 本論文で到達した結論は、この仮説とは無関係であり、以下の3つの種類の実験事実から導き出された：

1. 回路を通る力線の変化に従って、隣接電流の増加または減少による電流誘導。
2. 磁気ポテンシャルの変化に従った磁気強度の分布。
3. 誘電体を通る静電気の誘導（または影響）。

さて、我々はこれらの原理から、電磁場中の電流、磁石、帯電物体に作用する力学的力の存在と法則を示すことに取りかかることができる。

#### 4. 第4部 — 場の中の力学的作用

4.1. 運動する導体に働く力学的力. (76) 我々は、導体運動を助ける起電力によって為された仕事は、導体中の電流と運動による電磁運動量の増加の積に等しいことを示した (§§34&35)。

長さ  $a$  の短い直線導体が、その両端を2つの平行な導体上に乗せて、 $x$  方向にそれ自身と平行に運動するとしよう。その時、 $a$  の運動による電磁運動量の増加は、

$$a \left( \frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dz} \frac{dz}{ds} \right) \delta x$$

となるだろう。平行導体の長さを増加することによって回路を伸長することによるものは、

$$-a \left( \frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{ds} \right) \delta x$$

になるだろう。全増加は

$$a \delta x \left\{ \frac{dy}{ds} \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) - \frac{dz}{ds} \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) \right\},$$

これは、「磁力」の方程式 (B)、(61)<sup>20</sup>、によって、

$$a \delta x \left( \frac{dy}{ds} \mu \gamma - \frac{dz}{ds} \mu \beta \right)$$

のようになる。

<sup>20</sup> 訳者注：論文中の p. 482 を (61) に変えた。

$X$  を導体の単位長さあたりの  $x$  方向に沿って作用する力であるとしよう。その時、為された仕事は  $Xa\delta x$  である。

$C$  を导体中の電流とし、 $p'$ 、 $q'$ 、 $r'$  をその成分としよう。その時、

$$Xa\delta x = Ca\delta x \left( \frac{dy}{ds} \mu\gamma - \frac{dz}{ds} \mu\beta \right),$$

あるいは、同様にして、

$$(J) \quad \begin{cases} X = \mu\gamma q' - \mu\beta r', \\ Y = \mu\alpha r' - \mu\gamma p', \\ Z = \mu\beta p' - \mu\alpha q'. \end{cases}$$

これらは電流が流れている導体に作用する力学的力を決定する方程式である。この力は電流と磁力線に垂直であり、電流と磁力線に平行かつそれらの強度に比例する線によって形成される平行四辺形の面積によって見積もられる。

4.2. 磁石に働く力学的力. (77) 電流が流れていない任意の場の部分で、磁気強度の分布は、磁気ポテンシャルと呼ばれる関数の微分係数により表される。場の中に電流がない時、この量は各点で一価の値を持つ。電流がある時、そのポテンシャルは各点で一連の値を持つが、その微分係数は唯一の値をとる。すなわち、

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \beta, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \gamma.$$

これらの  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  の値を場の内在的エネルギーに対する表式 (式 (38)) に代入し、部分積分すると、それは

$$- \sum \left\{ \varphi \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\mu\alpha}{dx} + \frac{d\mu\beta}{dy} + \frac{d\mu\gamma}{dz} \right) \right\} dV$$

のようになる。表式

$$(39) \quad \sum \left( \frac{d\mu\alpha}{dx} + \frac{d\mu\beta}{dy} + \frac{d\mu\gamma}{dz} \right) dV = \sum m dV$$

は、空間  $V$  内に原点を持つ磁力線の数を示す。さて、磁極は我々には原点または磁力線の終端として知られている。そして、単位極はそれに属す  $4\pi$  本の線を持つ磁極である。なぜならそれは面積が  $4\pi$  の球にわたり単位距離で磁極の単位を生じるからである。

それゆえ、もし  $m$  が単位体積内の自由な正の磁気量であれば、上の表式は  $4\pi m$  と書かれる。そして場のエネルギーに対する表式は

$$(40) \quad E = - \sum \left( \frac{1}{2} \varphi m \right) dV$$

のようになる。

もし場中に電位  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  を生み出している、2つの磁極  $m_1$  と  $m_2$  があれば、そしてもし  $m_2$  が距離  $dx$  動かされ、そして力  $X$  でその方向に押されるのであれば、為された仕事は  $X ds$  であり、場の中のエネルギーの減少は

$$d \left( \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) (m_1 + m_2) \right)$$

である。そして、「エネルギー保存」の原理によって、これらは等しくなければならない。分布  $\varphi_1$  は  $m_1$  で決まり、 $\varphi_2$  は  $m_2$  で決まるので、量  $\varphi_1 m_1$  と  $\varphi_2 m_2$  は一定に留まるだろう。

また、グリーン (Green) が証明したように (Essay, p.10)

$$m_1 \varphi_2 = m_2 \varphi_1,$$

を示すことができるので、我々は

$$X dx = d(m_2 \varphi_1),$$

または

$$X = m_2 \frac{d\varphi_1}{dx} = m_2 \alpha_1,$$

を得る。ここで  $\alpha_1$  は  $m_1$  による磁気強度を表す。同様にして、

$$(K) \quad \begin{cases} Y = m_2 \beta_1, \\ Z = m_2 \gamma_1. \end{cases}$$

それゆえ、1つの磁極は磁力線の方向に極の大きさと磁気強度の積に等しい力で動かされる。

(78) もし磁気単極、すなわち、非常に長い磁石の一つの極が、場の中に置かれるのなら、 $\varphi$  の唯一の解は

$$(41) \quad \varphi_1 = - \frac{m_1}{\mu} \frac{1}{r},$$

ここで  $m_1$  は極の強度、 $r$  はその極からの距離である。

強度  $m_1$  と  $m_2$  の2つの極の間の斥力は

$$(42) \quad m_2 \frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}.$$

$\mu = 1$  の空気または任意の媒質では、これは単に  $\frac{m_1 m_2}{r^2}$  である。しかし、他の媒質では、与えられた 2 極間で作用する力は媒質の磁気誘導係数の逆数に比例する。これは極間の作用によって誘起された媒質の磁化によって説明される。

4.3. 帯電物体に働く力学的力. (79) もし場の中で電流または磁石の運動または強度変化がなければ、起電力は完全に電位の変化による。そして我々は

$$P = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\Psi}{dz}.$$

を持つだろう (§ 65)。電気変位によるエネルギーの表式 (I) を部分積分し、 $P$ 、 $Q$ 、 $R$  が無限遠でゼロになるということを思い起こすと、それは

$$\frac{1}{2} \sum \left\{ \Psi \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) \right\} dV,$$

のようになる。または「自由電気 ( $G$ )」 (68)<sup>21</sup>、により、

$$-\frac{1}{2} \sum (\Psi e) dV.$$

磁石に働く力学的作用の場合で使われたのと同じ実例により、他の帯電物体から生じる電位が  $\Psi_1$  である場の中に置かれた自由電気の量  $e_2$  を含む小さな物体に働く力学的力は、各成分に対して、

$$(D) \quad \begin{cases} X = e_2 \frac{d\Psi_1}{dx} = -P_1 e_2, \\ Y = e_2 \frac{d\Psi_1}{dy} = -Q_1 e_2, \\ Z = e_2 \frac{d\Psi_1}{dz} = -R_1 e_2. \end{cases}$$

となることが示される。それゆえ、1つの帯電物体は自由電気量と起電力の積に等しい力で起電力の方向に動かされる。

もし場の帯電が自由電気  $e_1$  を含む小さな帯電物体の存在から生じるのであれば、 $\Psi_1$  の唯一の解は

$$(43) \quad \Psi_1 = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1}{r}$$

である。ここで  $r$  はその帯電物体からの距離である。

それゆえ、2つの帯電物体  $e_1$  と  $e_2$  の間の斥力は

$$(44) \quad e_2 \frac{d\Psi_1}{dr} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

<sup>21</sup>訳者注：論文中の p. 485 を (68) に変えた。

4.4. 静電効果による電気現象の測定. (80) 我々が処理しなくてはならない量は、これまで、電流間の力学的作用に基礎を築かれた、測定の「電磁系」の言葉で表現されて来た。測定の静電系は、帯電物体間の力学的作用に基礎を築かれ、電磁系とは独立であり相容れない；だから、異なる類いの物理量の単位は、我々が採用する系に従って、異なる値をとる。そして、1つの系から他の系に移行するためには、全ての物理量の換算が必要とされる。

静電系に従うと、電気量  $\eta_1$  と  $\eta_2$  が帯電した2つの小さな物体間の斥力は、

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2}$$

である。ここで  $r$  はそれらの間の距離である。

2つの系の関係を電気の1電磁単位が  $v$  の静電単位を含むようにとろう；その時、 $\eta_1 = v e_1$  と  $\eta_2 = v e_2$  である。そしてこの斥力は方程式 (44) により、

$$(45) \quad v^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

になる。ここで実験が為された媒質（すなわち、共通の空気）中の「電気弾性」係数  $k$  は、方程式

$$(46) \quad k = 4\pi v^2$$

によって、1電磁単位における静電単位の数  $v$  に関連している。

量  $v$  はいくつかのやり方の実験で決定される。MM. ウェーバー (Weber) とコールラウシュ (Kohlrausch) の実験によれば、

$$v = 310,740,000 \text{ m/s.}$$

(81) この研究から明らかになることは、もし我々が電磁場を含む媒質が、誘電体である時には、そのどの部分も電気分極（この中では、我々が媒質が分割されたと思うどの要素の反対側も正反対に帯電する）を受ける性質があると仮定するのであれば、そしてもし我々がまたこの分極あるいは電気変位がそれを生じるか維持する起電力に比例していると仮定するのであれば、我々は誘電体媒質中の帯電物体が、実験によって確立されたのと同じ法則に従う力でお互いに作用するだろうということを示すことができるということである。

エネルギーは、その消費によって電氣的引力と斥力が生成されるが、我々は帯電物体を取り囲む誘電体媒質中に蓄えられ、我々の理論上、単に本当の作用バネが求められる空気または他の誘電体の境界面である、それらの物体自体の表面の上には蓄えられないと仮定する。

4.5. 重力の引力に関する注意. (82) 磁気と電気の両方の引力と斥力を取り巻く媒質の作用に由来させて、それらが距離の2乗に逆比例するということを見いだした後では、我々は自然に同じ距離法則に従う重力の引力もまた取り巻く媒質の作用に由来するのかどうかを知りたくなる。

これについて、重力は磁気と電気とは異なる；考慮される物体は、磁極や帯電物体のような反対符号の代わりにすべて同種のものである。これらの間の力は引力であり、電氣的物体や磁氣的物体のようなものの場合のような斥力ではない。

2つの重い物体の近くの重力力線は、同一名の2つの極の近くの磁力線と厳密に同じ形をしている；しかし、極どうしは反発し合うが、物体どうしは引きつけ合う。 $E$ を2つの重力のある物体  $M_1$  と  $M_2$  を取り巻く場の内在的エネルギーとしよう。そして  $E'$  を2つの磁極  $m_1$  と  $m_2$  (これは  $M_1$  と  $M_2$  に数値的に等しい) を取り巻く場の内在的エネルギーとしよう。そして  $X$  を変位  $\delta x$  の間で作用する重力、そして  $X'$  を磁力であるとしよう。

$$X\delta x = \delta E, \quad X'\delta x = \delta E';$$

さて、 $X$  と  $X'$  は数値的に等しいが反対符号である：だから

$$\delta E = -\delta E',$$

または

$$\begin{aligned} E &= C - E' \\ &= C - \sum \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dV, \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  は磁気強度の成分である。もし  $R$  が結果として生じる重力であり、 $R'$  が場の対応する部分の結果として生じる磁力であれば、

$$R = -R', \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2 = R'^2.$$

それゆえ、

$$(47) \quad E = C - \sum \frac{1}{8\pi} R^2 dV.$$

それゆえ、重力場の内在的エネルギーは、結果として生じる重力があるところならどこでも少なくなければならない。

エネルギーは本質的に正であるので、任意の空間部分が負の内在的エネルギーを取ることとは不可能である。それゆえ、系の異なる物体間や各物体の物質内の、空間の平衡点のような、結果として生じる力の存在しないそれらの空間部分は、

$$\frac{1}{8\pi} R^2$$

より大きい、単位体積あたりの内在的エネルギーを持たなくてはならない。ここで、 $R$  は宇宙の任意の部分における重力強度の可能な最大値である。

それゆえ、指摘された方法で取り巻く媒質の作用から重力が生じるという仮定は、この媒質のどの部分も、擾乱のない時には、膨大な内在的エネルギーを持つという結論、そして重い物体の存在はたとえどこに結果として生じる引力あるにせよ、このエネルギーを消去するようにその媒質に影響するという結論を導く。

私はある媒質がそういう性質をどのようにして持つことができるのか理解できないので、私は重力の起源に対する探索の方向へはもはやこれ以上進むことができない。

### 5. 第5部 — コンデンサーの理論

5.1. コンデンサーの容量. (83) コンデンサーの最も簡単な形は2つの導体面で仕切られた絶縁物質の一様な層からなる。そしてその容量は電位差が1の時にどちらかの面の電気量で測定される。

$S$  をどちらかの面の面積、 $a$  を誘電体の厚さ、 $k$  を電気弾性係数としよう；その時、コンデンサーの片側で電位は  $\Psi_1$ 、もう片方で  $\Psi_1 + 1$  であり、物質内では

$$(48) \quad \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{a} = kf.$$

コンデンサーの外側では、 $\frac{d\Psi}{dx}$ 、すなわち  $f$  がゼロであるので、第1の面上の電気量 =  $-Sf$ 、第2の面上の電気量 =  $+Sf$  である。それゆえ、コンデンサーの容量は、電磁単位では  $Sf = \frac{S}{ak}$  である。

5.2. 電気誘導 ( $D$ ) の比容量. (84) もしコンデンサーの誘電体が空気であれば、電磁単位における容量は (両端で満たされる条件から生じる補正を無視すれば)  $\frac{S}{4\pi a}$  である。もし誘電体が空気との比が  $D$  である容量を持つのなら、コンデンサーの容量は  $\frac{DS}{4\pi a}$  となる。

それゆえ、

$$(49) \quad D = \frac{k_0}{k},$$

ここで  $k_0$  は空気における  $k$  の値、これは1にとられる。

5.3. 電気吸収. (85) コンデンサーが形成される誘電体が完全な絶縁体ではない時、伝導現象が電気変位の現象と結びつく。コンデンサーは、帯電したまま放置されると、徐々に電荷を失う。そしてある場合には、完全に放電した後で、最初の電荷と同じ符号の新しい電荷を徐々に帯びて来る。そして、これは最後に消滅する。これらの現象は、ファラデー (Faraday) 教授 (Experimental Researches, Series XI.) と F. ジェンキン (Jenkin) 氏 (Report of Committee of Board of Trade on Submarine Cables) によって記述され来た。そして、「電気吸収」の名前の下に分類されている。

(86) 我々は異なる物質のいくつかの平行層からなるコンデンサーの場合を考えるつもりである。もし両端面の間の一定の電位差が電気の永久定常流の条件が達成するまでの短い時間保たれるのなら、各境界面はそれぞれの各側に物質の性質に依存する電荷を持つだろう。もし今両端面が放電されるのなら、これらの内部電荷は徐々に散逸して行くだろう。そして、もしそれらが絶縁されているのなら、ある電荷が両端面上に再び現われるだろう。あるいはまた、もしそれらが導体で繋がれたなら、ある電気量が平衡の再達成の間に導体を通して押し流される。

コンデンサーの何層かの厚さを  $a_1$ 、 $a_2$ 、&c. としよう。

これらの層に対する  $k$  の値をそれぞれ  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  としよう。そして、

$$(50) \quad a_1 k_1 + a_2 k_2 + \&c. = ak,$$

としよう。ここで、 $k$  は空気の "電気弾性" であり、 $a$  は等価な空気コンデンサーの厚さである。

層の抵抗をそれぞれ  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $\&c.$  としよう。そして、 $r_1 + r_2 + \&c. = r$  を単位面積あたりの、それを通る定常電流に対するコンデンサー全体の抵抗としよう。

各層の電気変位を  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $\&c.$  としよう。

第 1 面上の電位を  $\Psi_1$ 、単位面積あたりの電気を  $e_1$  としよう。

第 1 と第 2 の面の境界での対応する量を  $\Psi_2$  と  $e_2$  などとしよう。それから、方程式 (G) と (H) により、

$$(51) \quad \begin{cases} e_1 = -f_1, & \frac{de_1}{dt} = -p_1, \\ e_2 = f_1 - f_2, & \frac{de_2}{dt} = p_1 - p_2, \\ \&c. & \&c. \end{cases}$$

しかし、方程式 (E) と (F) により、

$$(52) \quad \begin{cases} \Psi_1 - \Psi_2 = a_1 k_1 f_1 = -r_1 p_1, \\ \Psi_2 - \Psi_3 = a_2 k_2 f_2 = -r_2 p_2, \\ \&c. & \&c. & \&c. \end{cases}$$

起電力が十分な時間保持された後、電流は各層で同じになる。そして、

$$p_1 = p_2 = \&c. = p = \frac{\Psi}{r},$$

ここで  $\Psi$  は両端層間の全電位差である。その時、我々は

$$(53) \quad \begin{cases} f_1 = -\frac{\Psi}{r} \frac{r_1}{a_1 k_1}, & f_2 = -\frac{\Psi}{r} \frac{r_2}{a_2 k_2}, & \&c. \\ e_1 = \frac{\Psi}{r} \frac{r_1}{a_1 k_1}, & e_2 = \frac{\Psi}{r} \left( \frac{r_2}{a_2 k_2} - \frac{r_1}{a_1 k_1} \right), & \&c. \end{cases}$$

を得る。これらは異なる面上の電気量である。

(87) さて、コンデンサーが、両端面を完全な導体で繋いで、それらの電位が一瞬に等しくなるように放電したとしよう。その時、両端面の電気は変化するだろうが、しかし内部面の電気は逃げる時間がないにちがいない。全電位差は今

$$(54) \quad \Psi' = a_1 k_1 e'_1 + a_2 k_2 (e'_1 + e_2) + a_3 k_3 (e'_1 + e_2 + e_3), \&c. = 0,$$

である。ここに、もし  $e'_1$  が  $e_1$  が瞬時の放電によってできるものであれば、

$$(55) \quad e'_1 = \frac{\Psi}{r} \frac{r_1}{a_1 k_1} - \frac{\Psi}{ak} = e_1 - \frac{\Psi}{ak}.$$

それゆえ、瞬間的な放電は  $\frac{\Psi}{ak}$ 、または、等価な厚さ  $a$  の空気コンデンサーによって放電したであろう量である。それは完全な絶縁の欠如によって変化しない。

(88) さて、壊れた両端面間の接続とコンデンサーはそのままであると仮定しよう。そして、内部電荷のゆっくりとした散逸を考えよう。 $\Psi'$  を任意の時刻  $t$  における両端面の電位差であるとしよう；その時、

$$(56) \quad \Psi' = a_1 k_1 f_1 + a_2 k_2 f_2 + \&c.;$$

しかし

$$a_1 k_1 f_1 = -r_1 \frac{df_1}{dt},$$

$$a_2 k_2 f_2 = -r_2 \frac{df_2}{dt}.$$

それゆえ、 $f_1 = A_1 e^{-\frac{a_1 k_1}{r_1} t}$ ,  $f_2 = A_2 e^{-\frac{a_2 k_2}{r_2} t}$ ,  $\&c.$  ; そして、 $e'_1$ ,  $e_2$ ,  $\&c.$  を参照することによって、我々は

$$(57) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\Psi}{r} \frac{r_1}{a_1 k_1} - \frac{\Psi}{ak}, \\ A_2 = \frac{\Psi}{r} \frac{r_2}{a_2 k_2} - \frac{\Psi}{ak}, \\ \&c. \end{cases}$$

を見いだす；それゆえ、我々は任意の時刻における両端の電位差に対して、

$$(58) \quad \Psi' = \Psi \left\{ \left( \frac{r_1}{r} - \frac{a_1 k_1}{ak} \right) e^{-\frac{a_1 k_1}{r_1} t} + \left( \frac{r_2}{r} - \frac{a_2 k_2}{ak} \right) e^{-\frac{a_2 k_2}{r_2} t} + \&c. \right\}$$

を見いだす。

(89) この結果から明らかなのは、もしすべての層が同じ物質からできているのなら、 $\Psi$  はいつもゼロであるだろうということである。もしそれらが異なる物質からなるのなら、それらが置かれる順番はかまわない。そしてその効果は、各物質が、1層からなるか、あるいは、いくつかの薄い層に分割されて、他の物質の薄い層の間で任意の順番に並んでいるのかどうかにかかわらず、同じであるだろう。それゆえ、任意の物質（その部分が数学的に一様ではない、それらは明らかにそうなのだけれども）は、吸収現象を示すかもしれない。また、係数の大きさの順序は引数の順序と同じであるので、 $\Psi'$  の値は決して符号を変えることはできないが、ゼロから出発し、正になり、そして最後に消えなくてはならない。

(90) 次に、コンデンサーが電流によって全体的に飽和し、それから放電した後で、その両端面が抵抗  $R$  の導体で接続された場合に第 1 面から第 2 面に通る全電気を考えよう。 $p$  をこの導体中の電流としよう；その時、放電の間、

$$(59) \quad \Psi' = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \&c. = pR.$$

時間に関して積分し、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  を異なる導体を伝わる電気量と呼ぶと、

$$(60) \quad q_1 r_1 + q_2 r_2 + \&c. = qR.$$

いくつかの面上の電気量は

$$\begin{aligned} e'_1 - q - q_1, \\ e_2 + q_1 - q_2, \\ \&c.; \end{aligned}$$

そして、最後に全ての量が消滅するので、我々は

$$\begin{aligned} q_1 &= e'_1 - q, \\ q_2 &= e'_1 + e_2 - q, \end{aligned}$$

を見いだす；それゆえ、

$$qR = \frac{\Psi}{r} \left( \frac{r_1^2}{a_1 k_1} + \frac{r_2^2}{a_2 k_2} + \&c. \right) - \frac{\Psi r}{ak},$$

または

$$(61) \quad q = \frac{\Psi}{akrR} \left\{ a_1 k_1 a_2 k_2 \left( \frac{r_1}{a_1 k_1} - \frac{r_2}{a_2 k_2} \right)^2 + a_2 k_2 a_3 k_3 \left( \frac{r_2}{a_2 k_2} - \frac{r_3}{a_3 k_3} \right)^2 + \&c. \right\},$$

本質的に正の量；それゆえ、第 1 の帯電が一方向にある時、第 2 の放電はいつも第 1 の放電と同じ方向にある<sup>22</sup>。

## 6. 第 6 部 — 光の電磁理論

(91) この論文の最初で、我々は、光の現象と同様に同じ媒質内で他の現象の原因を求めるための正当と認められる基礎を持つことを示すために、光の振動が伝播する弾性媒質の光学的仮説を使用した。それから、我々は、電氣的または磁氣的物体を取り巻く場の性質の説明を求めて電磁現象を研究した。このようにして、我々は電磁場のある性質を表すある方程式に到達した。さて、我々は、電磁現象のみから導かれた、電磁場を構成するもののこれ

<sup>22</sup>この論文は王立協会と連絡をとっているもので、私は 1864 年の the Annales de Chimie における、M. ゴーゲイン (Gaugain) による論文を見た。その中で、彼は電気吸収と第 2 の放電の現象を混合コンデンサー理論から導き出した。

らの性質が、同じ媒質を通る光の伝播を説明するのに十分であるかどうかを研究して行こうと思う。

(92) 方向余弦が  $l, m, n$  である平面波が測度  $V$  で場の中を伝播すると仮定しよう。その時、すべての電磁関数は

$$w = lx + my + nz - Vt$$

の関数であるだろう。「磁力」の方程式 (B)、(61)<sup>23</sup>、は

$$\mu\alpha = m \frac{dH}{dw} - n \frac{dG}{dw},$$

$$\mu\beta = n \frac{dF}{dw} - l \frac{dH}{dw},$$

$$\mu\gamma = l \frac{dG}{dw} - m \frac{dF}{dw},$$

のようになるだろう。もし我々がこれらにそれぞれ  $l, m, n$  を掛けて加えれば、我々は

$$(62) \quad l\mu\alpha + m\mu\beta + n\mu\gamma = 0,$$

を見いだす。これは磁化の方向が波動面内になくなくてはならないことを示す。

(93) もし我々が「磁力」の方程式 (B) を「電流」の方程式 (C) と結びつけば、そして簡単のために

$$(63) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = J, \quad \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \nabla^2,$$

とおけば、

$$(64) \quad \begin{cases} 4\pi\mu p' = \frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F, \\ 4\pi\mu q' = \frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu r' = \frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H. \end{cases}$$

もし場の中の媒質が完全な誘電体であれば、真の伝導はない。電流  $p', q', r'$  が電気変位の唯一の変化である。あるいは、「全電流」の方程式 (A) によって、

$$(65) \quad p' = \frac{df}{dt}, \quad q' = \frac{dg}{dt}, \quad r' = \frac{dh}{dt}.$$

<sup>23</sup> 訳者注：論文中の p. 482 を (61) に変えた。

しかしこれらの電気変位は起電力で引き起こされる。だから、「電気弾性」の方程式 (E) によって、

$$(66) \quad P = kf, \quad Q = kg, \quad R = kh.$$

場の中には導体運動がないので、これらの起電力は電磁関数または静電気関数のいずれかの変化による；それゆえ、起電力の方程式 (D) は

$$(67) \quad \begin{cases} P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}, \end{cases}$$

となる。

(94) これらの方程式を結びつけると、我々は次の方程式を得る：—

$$(68) \quad \begin{cases} k \left( \frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F \right) + 4\pi\mu \left( \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dx dt} \right) = 0, \\ k \left( \frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G \right) + 4\pi\mu \left( \frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy dt} \right) = 0, \\ k \left( \frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H \right) + 4\pi\mu \left( \frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz dt} \right) = 0. \end{cases}$$

もし我々がこれらの方程式の第3番目を  $y$  に関して微分し、第2を  $z$  に関して微分し、差をとると、 $J$  と  $\Psi$  が消える。そして、磁力の方程式 (B) を思いだすと、結果は

$$(69) \quad \begin{cases} k \nabla^2 \mu \alpha = 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \alpha, \\ k \nabla^2 \mu \beta = 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \beta, \\ k \nabla^2 \mu \gamma = 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \gamma, \end{cases}$$

となる。

(95) もし我々が  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  が  $lx + my + nz - Vt = w$  の関数であると仮定するのなら、第1の方程式は

$$(70) \quad k\mu \frac{d^2\alpha}{dw^2} = 4\pi\mu^2 \nabla^2 \frac{d^2\alpha}{dw^2},$$

または

$$(71) \quad V = \pm \sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}},$$

となる。他の方程式も  $V$  に対して同じ値を与えるので、波動はどの方向へも速度  $V$  で伝播する。

この波は完全に磁化の方向が波動面内にある磁気擾乱からなる。磁化の方向が波動面内がない磁気擾乱は、まったく平面波として伝播することができない。

それゆえ、電磁場を通じて伝播する磁気擾乱は、この点で光と一致する。任意の点における擾乱は伝播方向に直交し、そのような波は偏光のすべての性質を持つことができる。

(96)  $k$  の値を決定するために実験が為された唯一の媒質は、 $\mu = 1$  の空気である。それゆえ、式 (46) より、

$$(72) \quad V = v.$$

MM. ウェーバー (Weber) とコールラウシュ (Kohlrausch)<sup>24</sup>の電磁実験によって、

$$v = 310,740,000 \text{ m/s}$$

は電気の 1 電磁単位における静電単位の数である。そして、我々の結果によれば、これは空気または真空中の光速度に等しくなるべきである。

空気中の光速度は、M. フィゾー (Fizeau)<sup>25</sup>の実験によって、

$$V = 314,858,000;$$

M. フーコー (Foucault)<sup>26</sup>のもっと正確な実験によれば、

$$V = 298,000,000.$$

光行差と地球の軌道半径の受け取られた値から導かれた、地球を取り巻く空間内の光速度は

$$V = 308,000,000$$

<sup>24</sup>Leipzig Transactions, vol. v. (1857), p. 260, または Poggendorff's 'Annalen', Aug. 1859, p. 10.

<sup>25</sup>Comptes Rendus, vol. xxix. (1849), p. 90.

<sup>26</sup>Ibid. vol. lv. (1862), pp. 501, 792.

である。

(97) それゆえ、実験から導かれた光速は、我々がまだ手にしていない実験の唯一の集合から得られた  $v$  の値と十分によく一致する。 $v$  の値は、既知の容量のコンデンサーが帯電させられた起電力を測定することによって、そして検流計の中の電氣量を電磁単位で計測するように、検流計を通してコンデンサーを放電することによって得られた。実験中の光の唯一の使用は装置を見ることであつた。M. フーコー (Foucault) によって見いだされた  $V$  の値は、回転する鏡が向きを変える角度を決定することによって得られた。一方、それから反射された光は測定コースに沿って往復した。電氣と磁氣からなるものは一切何も使われなかつた。

結果の一致は、光と磁氣が同じ物質の作用であるということと、光は電磁法則に従つて場を伝播した電磁擾乱であることというを示しているように見える。

(98) さて、(94) の方程式に戻ろう。これには、量  $J$  と  $\Psi$  が現われる。それは、最終方程式から消えたこれらの量に依存して、他のどんな種類の擾乱が媒質を伝播できるかどうかを見るためである。

もし我々が方程式

$$(73) \quad \nabla^2 \chi = \frac{d^2 \chi}{dx^2} + \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \frac{d^2 \chi}{dz^2} = J,$$

から  $\chi$  を決定し、そして方程式

$$(74) \quad F' = F - \frac{d\chi}{dx}, G' = G - \frac{d\chi}{dy}, H' = H - \frac{d\chi}{dz},$$

から  $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$  を決定するのなら、

$$(75) \quad \frac{dF'}{dx} + \frac{dG'}{dy} + \frac{dH'}{dz} = 0,$$

である。そして(94)の方程式は形式

$$(76) \quad k\nabla^2 F' = 4\pi\mu \left( \frac{d^2 F'}{dt^2} + \frac{d}{dxdt} \left( \Psi + \frac{d\chi}{dt} \right) \right),$$

になる。その3つの方程式を  $x$ 、 $y$ 、 $z$  に関して微分して加えると、我々は

$$(77) \quad \Psi = -\frac{d\chi}{dt} + \varphi(x, y, z),$$

と

$$(78) \quad \begin{cases} k\nabla^2 F' = 4\pi\mu \frac{d^2 F'}{dt^2}, \\ k\nabla^2 G' = 4\pi\mu \frac{d^2 G'}{dt^2}, \\ k\nabla^2 H' = 4\pi\mu \frac{d^2 H'}{dt^2}, \end{cases}$$

を見いだす。それゆえ、 $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$  で示される擾乱は場の中を速度  $V = \sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$  で伝播する；そして

$$\frac{dF'}{dx} + \frac{dG'}{dy} + \frac{dH'}{dz} = 0,$$

であるので、これらの擾乱の合力は波動面内にある。

(99)  $\chi$  に依存する部分である、全擾乱  $F$ 、 $G$ 、 $H$  の残りの部分は、方程式

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{d^2\chi}{dt^2} = 0,$$

に表現されることを除いて条件に左右されない。もし我々がこの方程式に作用  $\nabla^2$  を施せば、それは

$$(79) \quad ke = \frac{dJ}{dt} - k\nabla^2\varphi(x, y, z)$$

になる。

媒質は完全な絶縁体であるので、自由電気、 $e$ 、は動かない。そして、それゆえ、 $\frac{dJ}{dt}$  は  $x$ 、 $y$ 、 $z$  の関数であり、 $J$  の値は定数かゼロ、あるいは時間的に一様に増大するか消滅するかのいずれかである；したがって、 $J$  に依存する擾乱は波としては伝播できない。

(100) 純粋に実験的証拠から導き出された電磁場の方程式は、横波の振動だけが伝播できることを示す。もし我々が我々の実験的知識を超えて行けるとすると、我々が電気流体と呼ぶことのできる媒質に有限密度を付与できるとする、そしてその流体の代表としてガラス状または松やに状の電気を選択できたとなると、我々はこの密度に依存する速度で伝播する縦波振動を持つに違いない。しかしながら、我々はガラス状の電気を物質として考えたらいいのか、あるいは物質ではないとして考えていいのかわからぬので、我々は電気密度については証拠を持たない。

それゆえ、電磁科学は、場を伝播できる擾乱の向きに関して厳密に光科学と同じ結論を導く；両者は横方向の振動の伝播を正しいと断言する。そして、両者ともに同じ伝播速度を与える。一方、両方の科学は、縦波振動の存在に賛成するか否定するかを求められると当惑するのである。

6.1. 物質の屈折率と電磁場の性質との関係. (101) 「波動理論」によると、媒質中の光速は、

$$\frac{1}{i}V_0$$

である。ここで  $i$  は屈折率であり、 $V_0$  は真空中の光速である。「電磁理論」によると、光速は、

$$\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$$

である。ここで、式 (49) と (71) により、 $k = \frac{1}{D}k_0$  と  $k_0 = 4\pi V_0^2$  である。それゆえ、

$$(80) \quad D = \frac{i^2}{\mu},$$

または、「比誘導容量」は、屈折率の 2 乗 ÷ 磁気誘導係数に等しい。

6.2. 結晶媒質中の電磁擾乱の伝播. (102) さて、 $k$  と  $\mu$  の値が異なる方向で異なる媒質における平面波の伝播条件を計算しよう。我々は、短い周期の擾乱に拡張されたような、現段階の不完全な理論の状態では、この問題の完全な吟味を与えようとは思わないので、我々は磁気誘導軸が電気弾性軸と方向が一致していると仮定するだろう。

(103) 3つの軸方向の磁気係数の値を  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\nu$  としよう。その時、磁力の方程式 (B) は

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dx}, \\ \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \nu\gamma = \frac{dG}{dz} - \frac{dF}{dy}, \end{array} \right.$$

となる。

電流方程式 (C) は前のままである。

電気弾性方程式 (E) は

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 4\pi a^2 f, \\ Q = 4\pi b^2 g, \\ R = 4\pi c^2 h, \end{array} \right.$$

となるだろう。ここで、 $4\pi a^2$ 、 $4\pi b^2$  と  $4\pi c^2$  は  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸に対する  $k$  の値である。

これらの方程式を (A) と (D) と結びつけると、我々は

$$(83) \quad \frac{1}{\mu\nu} \left( \lambda \frac{d^2 F}{dx^2} + \mu \frac{d^2 F}{dy^2} + \nu \frac{d^2 F}{dz^2} \right) - \frac{1}{\mu\nu} \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dF}{dx} + \mu \frac{dG}{dy} + \nu \frac{dH}{dz} \right) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{d^2 \Psi}{dx dt} \right)$$

の形の方程式を得る。

(104) もし  $l$ 、 $m$ 、 $n$  が波の方向余弦、 $V$  を波の速度であるとすれば、そしてもし

$$(84) \quad lx + my + nz - Vt = w,$$

とすれば、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  と  $\Psi$  は  $w$  の関数になるだろう；そしてもし我々が  $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$  と  $\Psi'$  をこれらの量の  $w$  に関する 2 次微分とすれば、その方程式は

$$(85) \quad \begin{cases} \left( V^2 - a^2 \left( \frac{m^2}{\nu} + \frac{n^2}{\mu} \right) \right) F' + \frac{a^2 l m}{\nu} G' + \frac{a^2 l n}{\mu} H' - l V \Psi' = 0, \\ \left( V^2 - b^2 \left( \frac{n^2}{\lambda} + \frac{l^2}{\nu} \right) \right) G' + \frac{b^2 m n}{\lambda} H' + \frac{b^2 m l}{\nu} F' - m V \Psi' = 0, \\ \left( V^2 - c^2 \left( \frac{l^2}{\mu} + \frac{m^2}{\lambda} \right) \right) H' + \frac{c^2 n l}{\mu} F' + \frac{b^2 n m}{\lambda} G' - n V \Psi' = 0, \end{cases}$$

のようになるだろう。

もし我々が今

$$(86) \quad \begin{cases} V^4 - V^2 \frac{1}{\lambda \mu \nu} \{ l^2 \lambda (b^2 \mu + c^2 \nu) + m^2 \mu (c^2 \nu + a^2 \lambda) + n^2 \nu (a^2 \lambda + b^2 \mu) \}, \\ + \frac{a^2 b^2 c^2}{\lambda \mu \nu} \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) (l^2 \lambda + m^2 \mu + n^2 \nu) = U, \end{cases}$$

と置けば、我々は

$$(87) \quad F' V^2 U - l \Psi' V U = 0$$

と  $G'$  と  $H'$  に対して 2 つの同じような方程式を得るだろう。それゆえ、

$$(88) \quad V = 0,$$

$$(89) \quad U = 0,$$

または、

$$(90) \quad V F' = l \Psi', \quad V G' = m \Psi', \quad V H' = n \Psi',$$

のいずれかである。

第3の推測は、 $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$ の合力が波動面方向にあることを示す；しかし、その方程式は、もし可能なら、そのような擾乱が伝播できるだろうということを示さない。なぜなら我々が  $\Psi'$  と  $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$  の間の他の関係を持たないからである。

解  $V = 0$  は伝播のない場合に属している。

解  $U = 0$  は  $F'$ 、 $G'$ 、 $H'$  の値に応じて  $V^2$  の2つの値を与える。それらの値は方程式

$$(91) \quad \frac{l}{a^2} F' + \frac{m}{b^2} G' + \frac{n}{c^2} H' = 0,$$

$$(92) \quad \frac{a^2 l \lambda}{F'} (b^2 \mu - c^2 \nu) + \frac{b^2 m \mu}{G'} (c^2 \nu - a^2 \lambda) + \frac{c^2 n \nu}{H'} (a^2 \lambda - b^2 \mu) = 0,$$

によって与えられる。

(105) 軸に沿った速度は以下のようなものである：—

TABLE 2. 軸に沿った速度。最上列は伝播方向を示す。下3つの列は電気変位の方向を示す。

伝播方向		$x$	$y$	$z$
	$x$		$\frac{a^2}{\nu}$	$\frac{a^2}{\mu}$
電気変位の方向	$y$	$\frac{b^2}{\nu}$		$\frac{b^2}{\lambda}$
	$z$	$\frac{c^2}{\mu}$	$\frac{c^2}{\lambda}$	

さて、我々は、結晶のそれぞれの主平面でその面の方向に偏光した光線が通常の屈折の法則に従うこと、そしてそれゆえ、その速度がたとえ伝播する面内のどの方向であったとしても同じであることを知っている。

もし偏光が電気変位が偏光面内にある電磁擾乱からなるのであれば、

$$(93) \quad a^2 = b^2 = c^2.$$

それとは反対に、もし電気変位が偏光面に垂直であれば、

$$(94) \quad \lambda = \mu = \nu.$$

我々は、ファラデー (Faraday)、ブリュッカー (Plücker)、&c. の磁気実験から、多くの結晶で  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\nu$  は等しくないことを知っている。

結晶中の電気誘導に関するクノブラウフ (Knoblauch)<sup>27</sup>の実験は  $a$ 、 $b$ 、 $c$  が異なることを示しているように見える。

<sup>27</sup>Philosophical Magazine, 1852.

しかしながら、 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\nu$ の不一致はそれらの差を示すためには大きな磁力が必要とされるほどあまりに小さい。そしてその差は結晶の復屈折を説明するために十分な大きさがあるようには見えない。

一方、電気誘導に関する実験は、結晶内の微細な割れ目または伝導物質の割合のせいで誤りそうである。

磁力や電気力が光の振動の速さで交流振動している時のように、それらが永続的である時、我々がこれらの物体と磁力や電気力との関係が同じかどうかを決定できる以前に、結晶の電氣的性質や磁氣的性質に関する更なる実験が必要である。

6.3. 電気抵抗と透明度の関係。(106) 媒質が完全な絶縁体である代わりに、単位体積あたりの抵抗が  $\rho$  である導体であるとすれば、電気変位ばかりか真の伝導電流もあるだろう。この中では、電気エネルギーが熱に変化し、それによって波状運動 (undulation) が弱まる。吸収係数を決定するために、横波の擾乱  $G$  の  $x$  軸に沿った伝播を研究しよう。

以前の方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G}{dx^2} &= -4\pi\mu(q') \\ &= -4\pi\mu\left(\frac{dq}{dt} + q\right) \quad (A) \text{より,} \\ (95) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} &= +4\pi\mu\left(\frac{1}{k} \frac{d^2 G}{dt^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dG}{dt}\right) \quad (E) \text{と}(F) \text{により.} \end{aligned}$$

もし  $G$  が形式

$$(96) \quad G = e^{-px} \cos(qx + nt),$$

をしているのなら、我々は

$$(97) \quad p = \frac{2\pi\mu n}{\rho} \frac{n}{q} = \frac{2\pi\mu V}{\rho} \frac{V}{i},$$

を見いだす。ここで、 $V$  は空気中の光速度、 $i$  は屈折率である。厚さ  $x$  を通して伝わる入射光の割合は

$$(98) \quad e^{-2px}$$

である。

$R$  を厚さ  $x$ 、幅  $b$ 、長さ  $l$  の物質の板の、電磁単位における抵抗であるとしよう。その時、

$$\begin{aligned} R &= \frac{l\rho}{bx}, \\ (99) \quad 2px &= 4\pi\mu \frac{V}{i} \frac{l}{bR}. \end{aligned}$$

(107) たいいていの透明な固体物体は良質の絶縁体であるのに対し、すべての良い導体は非常に不透明である。

電解質は簡単に電流を流すことができるが、まだしばしば非常に透明である。しかしながら、我々は光の速い交流振動において、起電力はそれらが結合状態にある粒子間の完全な分離に影響を与えることはできないほど非常に短時間に作用するので、力が反対になると、粒子はエネルギー損失なくそれらの以前の位置に振動して戻る。

金、銀、プラチナは良い導体であるが、十分に薄い板に薄くされると、それらは光を通すようになる。もし金の抵抗が我々が実験する上で使うものと短期間の起電力に対するものが同じであれば、1枚の金の葉 (gold-leaf) (この抵抗は C. ホキン (Hockin) 氏により決定された) を通る光の量は入射光のわずか  $10^{-50}$ 、完全に知覚できない量になるだろう。私は緑の光の  $\frac{1}{500}$  と  $\frac{1}{1000}$  の間がそのような金の葉を透過することを見いだす。この多くは穴や割れ目を通して伝達する；しかしながら、透過光に強い緑の色合いを与えると、金それ自体を透過するに十分である。もし我々が、我々の実験のように、起電力が感知できる時間に作用する時より、光の振動の速さで逆転する時の方がもっとエネルギー損失が少ないと仮定しないのなら、この結果は光の電磁理論と調和しない。

6.4. 光の伝播で働くと見なされる起電力と磁力の絶対値。(108) もし光伝播の方程式が

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt)$$

であれば、起電力は

$$P = -A \frac{2\pi}{\lambda} V \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt)$$

となるだろう；そして単位体積あたりのエネルギーは

$$\frac{P^2}{8\pi\mu V^2}$$

となるだろう。ここで  $P$  は起電力の最大値を表す。この半分は磁気エネルギーであり、半分は電気エネルギーである。

単位面を通るエネルギーは

$$W = \frac{P^2}{8\pi\mu V}$$

であるから、

$$P = \sqrt{8\pi\mu VW},$$

ここで、 $V$  は光速、 $W$  は1秒あたりの光によって単位面積に伝達されたエネルギーである。

ピューレー (Pouillet) のデータによれば、W. トムソン (Thomson) 教授<sup>28</sup>によって計算されたように、地球の直射日光の力学的値は

$$83.4 \frac{fp}{s \cdot f^2}.$$

これは太陽から地球の距離で直射日光の  $P$  の最大値

$$P = 60,000,000,$$

または1メートルあたり600ダニエル電池 (Daniell's cells) を与える。  
太陽表面での  $P$  の値はおよそ

$$1 \text{メートルあたり } 13,000 \text{ ダニエル電池}$$

である。

地球で最大の磁力は0.193である<sup>29</sup>。

太陽でそれは4.13である。

これらの起電力と磁力は、どの光の振動においても2度逆数にされると考えなくてはならない；すなわち、1秒間に1,000兆倍以上である。

## 7. 第7部 — 電磁誘導係数の計算

7.1. 一般的方法. (109) すでに示されたように、2つの伝導回路  $A$  と  $B$  の間の電磁関係は、それらの形状や相対的位置の関数  $M$  に依存する。

$M$  はいくつかの異なる方法で計算される。もちろんそれらはすべて同じ結果を導く。

第1の方法。  $A$  が単位電流を運ぶ時、  $M$  は回路  $B$  の電磁運動量である。あるいは、

$$M = \int \left( F \frac{dx}{ds'} + G \frac{dy}{ds'} + H \frac{dz}{ds'} \right) ds',$$

ここで  $F, G, H$  は  $A$  内の単位電流による電磁運動量の成分である。  $ds'$  は  $B$  の線素である。そして、積分は  $B$  の回路にわたって行なわれる。

$F, G, H$  を見つけるために、我々は  $(B)$  と  $(C)$  により、

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} = -4\pi\mu p',$$

であり、  $G$  と  $H$  に対しても対応する方程式があることを観察する。  $p', q', r'$  は  $A$  内の電流成分である。

<sup>28</sup>Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1854 ("Mechanical Energies of the Solar System").

<sup>29</sup>キュー (Kew) での水平磁力はメートル単位で 1.76 である。

さて、もし我々が  $A$  の単一線素  $ds$  だけを考えたとすれば、我々は

$$p' = \frac{dx}{ds} ds, \quad q' = \frac{dy}{ds} ds, \quad r' = \frac{dz}{ds} ds,$$

を持つだろう。そして、その方程式の解は

$$F = \frac{\mu}{\rho} \frac{dx}{ds} ds, \quad G = \frac{\mu}{\rho} \frac{dy}{ds} ds, \quad H = \frac{\mu}{\rho} \frac{dz}{ds} ds,$$

ここで  $\rho$  は任意の点の  $ds$  からの距離である。それゆえ、

$$\begin{aligned} M &= \int \int \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz}{ds'} \right) ds ds' \\ &= \int \int \frac{\mu}{\rho} \cos \theta ds ds', \end{aligned}$$

ここで  $\theta$  は2つの線素  $ds$ 、 $ds'$  の方向の間の角度である。そして  $\rho$  はそれらの間の距離である。そして積分は両方の回路で行なわれる。

この方法では、我々は積分の間2つの線形回路だけに注意を集中する。

(110) 第2の方法。  $M$  は、 $A$  が単位電流を流す時、回路  $B$  を通過する磁力線の数である。または、

$$M = \sum (\mu\alpha l + \mu\beta m + \mu\gamma n) dS',$$

ここで、 $\mu\alpha$ 、 $\mu\beta$ 、 $\mu\gamma$  は  $A$  内の単位電流による磁気誘導成分である。 $S'$  は電流  $B$  によって囲まれた面である。そして  $l$ 、 $m$ 、 $n$  はその面に垂直な方向余弦である。積分はその面にわたって広がっている。

我々はこれを形式

$$M = \mu \sum \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi dS' ds$$

で表すことができる。ここで、 $dS'$  は  $B$  で囲まれた面素であり、 $ds$  は回路  $A$  の線素である。 $\rho$  はそれらの間の距離である。 $\theta$  と  $\theta'$  はそれぞれ  $\rho$  と  $ds$  の間、 $\rho$  と  $dS'$  と垂直方向の間の角度である。そして、 $\varphi$  は  $\theta$  と  $\theta'$  が測られた面の間の角度である。積分は回路  $A$  の周りとは  $B$  で囲まれた面にわたって行なわれる。

この方法は、1平面内にある回路の場合には最も便利である。この場合は、 $\sin \theta = 1$  と  $\sin \varphi = 1$  である。

(111) 第3の方法。  $M$  は、それぞれ電流が1である2つの回路内における電流の積に依存する場全体の内在的磁気エネルギーのあの部分である。

$\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を第1の回路による任意の点で磁気強度の成分、 $\alpha'$ 、 $\beta'$ 、 $\gamma'$  は第2の回路に対する同じものとしよう；その時、体積素  $dV$  の場の内在的エネルギーは、

$$\frac{\mu}{8\pi} ((\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 + (\gamma + \gamma')^2) dV$$

である。電流の積に依存する部分は

$$\frac{\mu}{4\pi} (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') dV$$

である。それゆえ、もし我々が各回路内の単位電流による磁気強度  $I$  と  $I'$  を知っているのであれば、我々は

$$\frac{\mu}{4\pi} \sum \mu I I' \cos \theta dV$$

を全空間にわたって積分することによって  $M$  を得ることができる。ここで  $\theta$  は  $I$  と  $I'$  の方向の間の角である。

7.2. コイルへの応用. ( 1 1 2 ) 平行な平面内の、曲線間の距離が至る所で同じであり、それぞれの半径と比べて小さい、2つの円形線形回路の間の相互誘導係数 ( $M$ ) を見いだすこと。

もし  $r$  が曲線間の距離であり、 $a$  がそれぞれの半径であるなら、 $r$  が  $a$  と比べて非常に小さい時、我々は第2の方法により、第1次近似として、

$$M = 4\pi a \left( \log_e \frac{8a}{r} - 2 \right)$$

を得る。 $M$  の値にもっと近い近似をするために、 $a$  と  $a_1$  は円の半径、 $b$  をそれらの面の間の距離としよう；その時、

$$r^2 = (a - a_1)^2 + b^2.$$

我々は次の条件を考えることによって  $M$  を得る：—

第1。  $M$  は微分方程式

$$\frac{d^2 M}{da^2} + \frac{d^2 M}{db^2} + \frac{1}{a} \frac{dM}{da} = 0$$

を満たさなければならない。この方程式は、円の共通の軸に関して対称的な磁場に対して正しいが、それ自体では  $a$ 、 $a_1$ 、 $b$  の関数として  $M$  の決定に導くことができない。それゆえ、我々は他の条件を使わなければならない。

第2。  $M$  の値は  $a$  と  $a_1$  が交換された時も同じでなければならない。

第3。  $M$  の最初の2つの項は、上で与えられたものと同じでなくてはならない。

こうして、 $M$  は次の級数に展開される：—

$$M = 4\pi a \log \frac{8a}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{a-a_1}{a} + \frac{1}{16} \frac{3b^2+(a_1-a)^2}{a^2} - \frac{1}{32} \frac{(3b^2+(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3} + \&c. \right\} \\ - 4\pi a \left\{ 2 + \frac{1}{2} \frac{a-a_1}{a} + \frac{1}{16} \frac{b^2-3(a_1-a)^2}{a^2} - \frac{1}{48} \frac{(6b^2-(a-a_1)^2)(a-a_1)}{a^3} + \&c. \right\}.$$

(113) 我々はこの結果を断面積が円の半径と比べて小さい電線の円形コイルの自己誘導係数 ( $L$ ) を見いだすために応用することができる。

コイルの断面が、円の平面内の幅が  $c$ 、円の平面に垂直な深さが  $b$  である長方形であるとしよう。

コイルの平均半径が  $a$ 、巻数が  $n$  であるとしよう。その時、我々は積分することにより、

$$L = \frac{n^2}{b^2 c^2} \int \int \int \int M(x, y, x', y') dx dy dx' dy',$$

を見いだす。ここで、 $M(x, y, x', y')$  は、座標がそれぞれ  $x, y$  と  $x', y'$  である、2つの巻き付きに対する  $M$  の値を意味する；積分は最初に  $x, y$  に関して長方形領域にわたって行なわれ、次に  $x', y'$  に関して同じ空間にわたって行なわれる。

$$L = 4\pi n^2 a \left\{ \log_e \frac{8a}{r} + \frac{1}{12} - \frac{4}{3} \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \cot 2\theta - \frac{\pi}{3} \cos 2\theta - \frac{1}{6} \cot^2 \theta \log \cos \theta - \frac{1}{6} \tan^2 \theta \log \sin \theta \right\} \\ + \frac{\pi n^2 r^2}{24a} \left\{ \log \frac{8a}{r} (2 \sin^2 \theta + 1) + 3.45 + 27.475 \cos^2 \theta - 3.2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{5} \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} \log \cos \theta \right\} \\ + \frac{\pi n^2 r^2}{24a} \left\{ \frac{13}{3} \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \log \sin \theta \right\} + \&c.$$

ここで、 $a$  = コイルの平均半径。

ここで、 $r$  = 長方形断面の対角線 =  $\sqrt{b^2 + c^2}$ 。

ここで、 $\theta = r$  と円の平面の間の角度。

ここで、 $n$  = 巻き数。

対数は自然対数である。角度は円周単位である。

「電気抵抗」の基準を決定するために英国協会委員会によって行なわれた実験では、1つの2重コイルが使用された。これは2つのほぼ等しい長方形断面のコイルからなり、それらの小さな間隔でお互いに平行に置かれた。

このコイルに対する  $L$  は以下のようにして得られた。

$L$  の値は6つの異なる場合に対して前の公式により計算された。その場合とは、考慮された長方形断面はいつも同じ幅を持ち、深さが

$$A, B, C, A+B, B+C, A+B+C,$$

そして各場合で  $n = 1$  のものである。

その結果を

$$L(A), L(B), L(C), \&c.,$$

と呼ぶと、こうして、我々は2つのコイルの相互誘導係数  $M(AC)$  を

$$2ACM(AC) = (A+B+C)^2L(A+B+C) - (A+B)^2L(A+B) - (B+C)^2L(B+C) + B^2L(B),$$

と計算する。その時、もし  $n_1$  がコイル  $A$  の巻き数、 $n_2$  がコイル  $B$  の巻き数であれば、2つのコイルを一緒にした自己誘導係数は

$$L = n_1^2L(A) + 2n_1n_2L(AC) + n_2^2L(B)$$

となる。

(114)  $L$  のこれらの値は電線の巻き付きが厳密に断面全体を埋めつくすように均等に分布しているという仮定の上で計算される。しかしながら、これは、一般的に電線が円形で絶縁物質で覆われているので、その場合とはいえない。それゆえ、電線内の電流は、電流が断面にわたって一様に分布していると仮定した場合よりももっと中央に集中している。そして、隣の電線中の電流は、そういう一様電流がするようには厳密に電流に作用しない。

これらの考察から生じる補正は数値量として現すことができる。これによって、我々は電線の長さを掛けなくてはならない。それらはたとえ電線の形がどんなものであろうと同じである。

各電線とその次の電線との距離を、それらが整然と順序良く並んでいると仮定して、 $D$  としよう。そして、電線の直径を  $d$  としよう。その時、電線の直径に対する補正は

$$+2 \left( \log \frac{D}{d} + \frac{4}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6} \right)$$

となる。8つの最隣接電線に対する補正は

$$+0.0236$$

である。次の列の16本に対しては

$$+0.00083$$

である。

電線の長さを掛け、前者の結果に加えると、これらの補正は  $L$  の真の値を与える。それは、その電流がある時間流され、電線の断面に一様に分布している時、電線の単位電流に対するコイル自体のポテンシャルの目安であると見なされる。

(115) しかし、電流の開始期とその変化の間、電流は電線の断面にわたって一様ではない。なぜなら、電流の異なる割合の間の誘導作用が断面の1部分の電流を別の部分の電流

より強くするからである。ある原因で生じる一様な起電力  $P$  が比抵抗  $\rho$  の円筒状の電線に作用する時、我々は

$$p\rho = P - \frac{dP}{dt}$$

を持つ。ここで  $F$  は方程式

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = -4\pi\mu p$$

から得られる。 $r$  は円筒軸からの距離である。

$F$  の値の 1 項を  $T r^n$  の形であるとしよう。ここで  $T$  は時間の関数である。その時、生成される  $p$  の項は

$$-\frac{1}{4\pi\mu} n^2 T r^{n-2}$$

の形である。それゆえ、もし我々が

$$F = T + \frac{\mu\pi}{\rho} \left( -P + \frac{dT}{dt} \right) r^2 + \left( \frac{\mu\pi}{\rho} \right)^2 \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} r^4 + \&c.$$

と書けば、

$$p\rho = \left( P + \frac{dT}{dt} \right) - \frac{\mu\pi}{\rho} \frac{d^2 T}{dt^2} r^2 - \left( \frac{\mu\pi}{\rho} \right)^2 \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^3 T}{dt^3} r^4 - \&c.$$

となる。任意の点における自己誘導の全反電流は

$$\int \left( \frac{P}{\rho} - p \right) dt = \frac{1}{\rho} T + \frac{\mu\pi}{\rho^2} \frac{dT}{dt} r^2 + \frac{\mu^2 \pi^2}{\rho^3} \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} r^4 + \&c.,$$

積分は  $t = 0$  から  $t = \infty$  である。

$$t = 0, p = 0 \text{ の時、ゆえに、} \left( \frac{dT}{dt} \right)_0 = P, \quad \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)_0 = 0, \&c.$$

$$t = \infty, p = \frac{P}{\rho} \text{ の時、ゆえに、} \left( \frac{dT}{dt} \right)_\infty = 0, \quad \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)_\infty = 0, \&c.$$

$$\int_0^\infty \int_0^r \left( \frac{P}{\rho} - p \right) r dr dt = \frac{1}{\rho} T \pi r^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu\pi^2}{\rho^2} \frac{dT}{dt} r^4 + \frac{\mu^2 \pi^3}{\rho^3} \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} \frac{d^2 T}{dt^2} r^6 + \&c.$$

積分は  $t = 0$  から  $t = \infty$  である。

$$\text{断面全体で } t = 0, p = 0 \text{ の時、ゆえに、} \left( \frac{dT}{dt} \right)_0 = P, \quad \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)_0 = 0, \&c.$$

$$\text{断面全体で } t = \infty, p = 0 \text{ の時、ゆえに、} \left( \frac{dT}{dt} \right)_\infty = 0, \quad \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)_\infty = 0, \&c.$$

またもし  $l$  が電線の長さ、 $R$  がその抵抗であれば、

$$R = \frac{\rho l}{\pi r^2}$$

である；そしてもし  $C$  が電線内で流される電流であるとすれば、 $C = \frac{Pl}{R}$  となる。  
全反電流は、

$$\frac{l}{R}(T_\infty - T_0) - \frac{1}{2}\mu\frac{l}{R}C = -\frac{LC}{R} \quad \S(35) \text{ による}$$

となる。

さて、電流が電線の断面の中心から周囲へ変化する代わりに全体で同じであったとしたら、 $F$  の値は

$$F = T + \mu\gamma \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

であるだろう。ここで  $\gamma$  は任意の瞬間の電線内の電流である。そして全反電流は、

$$\int_0^\infty \int_0^r \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dt} 2\pi r dr = \frac{l}{R}(T_\infty - T_0) - \frac{3}{4}\mu\frac{l}{R}C = -\frac{L/C}{R} \quad \text{と呼ぶ}$$

となる。それゆえ、

$$L = L' - \frac{1}{4}\mu l$$

である。または、 $L$  (変動電流に対する電線の自己誘導を計算するのに使われなくてはならない) の値は、電線の断面全体で一定であるとする電流の仮定から導かれたものより  $\frac{1}{4}\mu l$  だけ小さくなる。ここで  $l$  は電線の長さ、 $\mu$  は電線物質の自己誘導係数である。

(116) 1864年にキングズカレッジ (King's College) で行なわれた実験で英国協会委員会によって使用されたコイルの次元は、以下のものである：—

	メートル (m)
平均半径	= a = 0.158194
各コイルの深さ	= b = 0.01608
各コイルの幅	= c = 0.01841
コイル間の距離	= 0.02010
巻き数	n = 313
電線半径	= 0.00126

その表式の第1項から導かれた  $L$  の値は、437440 m である。

第2項から見いだされるように、コイルの断面と比べて無限に大きくはない半径に依存する補正は、 $-7345 m$ である。

電線直径に依存する補正は単位長さあたり	…	+0.44997
8つの隣接電線の補正	…	+0.0236
これらの次の16電線に対して	…	+0.0008
断面の異なる部分の電流変動への補正	…	<u>-0.2500</u>
単位長さあたりの全補正	…	0.22437
長さ	…	311.236 <i>m</i>
この種の補正の和	…	70 <i>m</i>
計算による <i>L</i> の最終的値	…	430165 <i>m</i>

*L* のこの値は、委員会のレポート<sup>30</sup>で説明された方法によって、観測を減らす上で採用された。*L* に依存する補正は速度の2乗で変化する。この補正が適用され、17秒に100回転から77秒に100回転に速度を変化させた、16の実験の結果は、速度の2乗に依存するどんな補正がさらに顕著な誤差を最小にするために適用されるべきかを決めるために最小2乗法によって比較された。

この実験の結果は *L* の計算結果は、*L* の値を得るためには1.0618倍されるべきであることを示した。この値が、最もつじつまの合う結果を与えるだろう。

それゆえ我々が計算によって得た <i>L</i>	…	430165 <i>m</i>
最小2乗法による <i>L</i> のありそうな値	…	456748 <i>m</i>
電子天秤 (§46 を見よ) を使った粗い実験結果	…	410000 <i>m</i>

コイルの次元から計算された *L* の値はおそらくその他のどの決定法よりもずっと正確である。

<sup>30</sup>British Association Reports, 1863, p. 169.