

R. Fürth の 1933 年の論文
「古典統計と量子力学の特定の関係について」
[“Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und
Quantenmechanik” ,
Zeitschrift für Physik, **81** 143 – 162]

ルカ・ペリティ Luca Peliti* *

パオロ・ムラトーレ・ジナンネスキ Paolo Muratore-Ginanneschi^{† †}

* サンタマリネッラ研究所、00058 サンタマリネッラ、イタリア

[†] ヘルシンキ大学数学・統計学部、PO Box 68、00014

ヘルシンキ、フィンランド

概要

量子ゆらぎとブラウン運動の深い類似性を指摘したフルト (R. Fürth) の 1933 年の論文の翻訳を紹介します。フルトは、非平衡熱力学指標の統計的に保存される量の分散と、対応する流速の分散を含む不確定性関係の存在を強調しています。この現象は完全に古典的なものであり、測定対象システムに対する変動する環境の影響にまで遡ります。ある意味で、フルトの論文は、ほぼ 30 年後にエドワード・ネルソン (Edward Nelson) らによって開発された量子化の確率的方法への道を開いたとも言えます。

1 序文

熱力学的不確定性関係は、確率熱力学における注目すべき不等式の集合であり、経験的電流の変動係数をその平均値およびエントロピー生成率に結び付けます (概要については、研究論文 [1,2] および/また

はモノグラフ [3] を参照してください)。簡単に言えば、変動係数が非常に小さい電流を実現するには、一般にエントロピー生成の点で最小限のコストが必要であることを示唆しています。その名前は、粒子の位置と速度を評価する精度の上限を設定する量子物理学の不確定性関係を想起させます。

ハイゼンベルクの不確定性関係を表す不等式とブラウン運動のような拡散過程に適用される同様の不等式との類似性が、1933 年にラインホルト・フルトが発表した注目すべき論文で指摘されたことは興味深い。量子ゆらぎから生じる不確定性と拡散粒子に作用するランダムな力による不確定性との間に深い類似点があることを指摘したこの論文は、ある意味で、ネルソンの量子力学に対する確率論的アプローチ [4] やパリシとウーが提唱する確率論的量子化アプローチ [5,6] など、より最近の発展への道を開いた。

私たちは、この比較的あまり知られていない論文の翻訳を提供することで、コミュニティに貢献したいと考えています。翻訳の前に著者の略歴が書かれ、その後に翻訳に関するコメントと短い解説が続きます。

*email <mailto:luca@peliti.org>

[†]email: paolo.muratoreginanneschi@helsinki.fi

す。解説では、フルトの結果を確率過程の現代的な言葉で表現し、確率熱力学の最近の発展に対するその意味を詳しく調べます [3]。著者の参考文献は、元の論文と同様に脚注として記載されていることに注意してください。キュレーターによる参考文献は括弧内に示され、最後にリストされています。

2 ラインホルト・フルト

おそらくフルトの伝記に関する最も詳しい情報は、エディンバラ王立協会の年鑑に掲載された彼の死亡記事から得られます [7]。

ラインホルト・ヘンリー・フルトは、1893 年 10 月 20 日、オーストリア＝ハンガリー帝国のボヘミア地方の首都であったプラハで生まれました。彼は文学と芸術に興味を持つ職業的な両親の一人息子でした。彼はプラハのオーストリア国立ギムナジウムで古典語を専攻して学びました。その後、1912 年から 1916 年までプラハの王立ドイツ帝国カール・フェルディナンド大学に通いました。そこで彼は実験物理学と理論物理学、そして数学の授業を受けました。このように、彼は勉強を始めた当初から物理学のあらゆる側面に興味を示していました。フルトがカール・フェルディナンド大学に入学したのは、エルンスト・マッハやアルベルト・アインシュタインといった世界的に有名な科学者を輩出していた同大学が物理学の頂点を過ぎた頃でした [8]。フルトは次のように回想しています。

当時、アインシュタインはチューリッヒの教授職に就くためにプラハを去ったばかりでした。私はすぐには彼に会えませんでした。が、いたるところに痕跡がありました。たとえば、戸棚には電荷を増幅する機械が保管されていました。アインシュタインはそれを設計しましたが、実験的な事柄にはほとんど関心がありませんでした。さらに重要なことは、アインシュタインの後任として理論物理学の教授となったフィリップ・フランクは、彼の考えを研究した数少な

い人物の 1 人でした。彼は私に相対性理論を紹介してくれました。私の先輩の同僚の中にはアインシュタインの弟子だった人もいて、彼の教育方法や人柄について私に教えてくれました。

フルトがアインシュタインと直接会ったのは、1920 年、27 歳の時でした。プラハで、フランクはフルトの注意をアインシュタインのブラウン運動の理論に引き付けました。このテーマはフルトを非常に魅了し、すぐにこの分野の研究を始めました。彼は物理学におけるゆらぎ現象に関するモノグラフ [9] を含む、査読付きの関連論文をいくつか発表した。後に彼はアインシュタインに連絡を取り、ブラウン運動に関する論文集 [10] の編集許可を求めました。フルスの名が今や広く知られるようになったのは、この著作の英訳 [11] が今でも広く読まれているためでもあります。

20 世紀初頭には、不規則な変動を伴うノイズの識別はまだ当然のこととは考えられていませんでした。さらに、ノイズ測定プロトコルは、観察者が直接数値結果を取得できる完全自動の指標ではなく、人間の感性に部分的に依存していました。1922 年にフルトは論文 [12] を発表し、ショットノイズ測定で記録された電子の電荷の変化を、いわゆる「耳のバランス」実験プロトコルの「生理学的」性質に基づいて説明しました。この論文は、今日では、20 世紀初頭の電話および無線工学における妨害の測定技術の発展の歴史における画期的なものです [13]。

フルトは、2 成分液体混合物における臨界乳白色の実験的調査に基づく論文で 1916 年に博士号を取得しました。1920 年に私講師の資格を取得しました。

1927 年に彼は理論物理学の特別教授となり、1931 年には実験物理学の教授および物理学部長となり、常に母校に留まりました。1933 年、ここで翻訳している論文が出版されたのと同じ年に、彼は反粒子でできた星の考えを提唱しました [14]。これはディラックが反陽子の考えを提唱したわずか 2 年後のことです [15]。反物質の考えの導入と初期の発展の歴

史については、[16]、特に第 5 章と第 10 章を参照してください。

1937 年、フルトは理学部長に任命されたが、その地位は 1938 年までしか続きませんでした。その年の秋、宥和政策という誤った期待からナチスドイツにチェコスロバキア共和国の一部を割譲するという「ミュンヘン協定」の間接的な結果として、フルトは「アーリア人」の任命を認めるために辞職を余儀なくされました。1939 年春、ナチスドイツはボヘミアとモラヴィアを占領し、ユダヤ人とチェコの公人に対する迫害運動が始まりました。フルトは大学を解雇されました。彼は妻とともに、第二次世界大戦勃発直前にチェコスロバキアから脱出し、所有物のかなりの部分を救い出しました [7]。フルトは、1936 年にエディンバラの自然哲学のテイト教授に就任したマックス・ボルンの招きでエディンバラに移住しました。フルトはエディンバラに 8 年間留まりました。当初は科学と学習の保護協会からの奨学金で支えられていました。後にデュワー研究フェローシップに就き、1942 年からは非常勤講師となりました。フルトは 84 歳でボルンの家に近いグランジ・ローン 60 番地に家を借りました。フルトはスコットランドの首都に滞在していた間ずっとボルンと密接に協力しました [17]。40 ページで、ボルンはエディンバラの有能な協力者の中でフルトを第一位に挙げています。

[フルト] は、戦争が始まる直前に難民としてやって来ましたが、結晶の熱力学やその他のテーマで私の生徒たちの勉強を指導する上で、私にとって大きな助けとなりました。

ロバート・ウィリアム・プリングルもその生徒の一人でした。プリングルは 1956 年に、原子核工学と超音波診断装置の分野を専門とする世界最大級の企業であるニュークリア・エンタープライズ (GB) 社を設立しました [18]。プリングルの博士課程のプロジェクトは、当時は計算が長くて退屈な作業であったフーリエ変換の計算方法の開発に焦点を当てていました。プリングルは実験を好んだため、フルト

が指導に加わりました。ボルン、フルト、プリングルは協力して、最初の光電子増倍管の 1 つを採用した、フーリエ変換の計算用アナログコンピュータを考案しました。彼らの最初のモデルは、エディンバラの数理解物理学で構築されました。それは、ネイチャー誌の共同論文 [19] と、その後の特許出願で説明されました。エンジニアリングバージョンは、1946 年から 1947 年にかけてフェランティによって構築され、かなりの関心を集めました。同じ時期に、フルトは他に 2 つの技術的に革新的な装置を製作した。彼は音叉式の動きと、200 倍以上の連続拡大が可能な陰極線オシログラフディスプレイを開発しました [8]。これらすべてを、非常に限られた予算で実現することができました。1943 年、その功績が認められ、フルトは王立協会の会員に選出されました。1947 年、フルトと妻はイギリス国民として帰化しました。同年、ロンドンのバークベック・カレッジの理論物理学の講師にも任命され、1961 年に退職するまでその職に就きました。

この時期の注目すべき研究としては [20,21] があり、これは社会物理学として知られるアプローチの最も初期の例とみなすことができます。

そこでフルトは、社会現象に対する純粋に力学的論的なアプローチの使用を以下の理由で批判しています [21]：

社会学者や政治家が「力」という言葉で意味するものは、数学的に定義することも定量的に測定することもできないため、さまざまな「力」を重ね合わせることで相互に補償し合うことができるという仮定は正当化されません。また、これが均衡をもたらす理由もありません。

彼はまた、偶然のゲームに基づく純粋に統計的なモデルの不十分さを指摘しています。

個人の運命が一定の確率に左右される、あるいは同じコミュニティ内の他の個人の同時期または以前の行動とは無関係である、という主張には根拠がありません。

代わりに彼は以下のように提案しています：

因果的側面と偶然的側面の両方を取り入れたモデルを採用する。物理学では、このような統一は過去半世紀の間に「統計力学」の発展によってもたらされました。

フルトは、社会共同体は、明確に区別され、ある程度は独立した単位の大きな集合体として概念化できるが、それらは互いに強く影響し合い、統計力学によって記述される物理学における協力的現象と類似していると主張しています。フルトの貢献は即座に反響を呼び、例えば [22] を参照されたい。

液体の統計熱力学に関する研究と統計物理学への多くの貴重な貢献が認められ、フルトは 1965 年にエディンバラ王立協会のキース メダルを受賞しました。彼の科学的業績は全体で約 200 本の論文に及び、数冊の本と特許も含まれています。また、彼は音楽への深い愛情と幅広い文化的関心でも知られています。彼は 1979 年に亡くなりました。

3 原論文：古典統計と量子力学の間の特定の関係について

プラハのラインホルト・フルトによる作品
プラハドイツ大学物理学研究所より
4 つの図付き。(1933 年 1 月 19 日受領)

要旨

我々は、古典統計による力学的システムの位置の確率分布の微分方程式と量子力学による微分方程式との間の形式的な類似性を強調する。これらの方程式は、同一粒子のクラスターの運動、すなわち拡散を記述するものとして解釈することもできる。このような拡散の物理的起源は、古典の場合では周囲の物質内の分子との衝突に帰せられ、量子力学の場合では不確定性関係に帰せられる。後者の場合、力が存在しない拡散が議論され、これに基づいて不確定

性関係の簡単な導出が与えられる。この推論の流れは古典拡散に引き継がれ、ハイゼンベルクの不確定性関係と厳密に類似して、位置と速度の分散の不等式を導出することができる。このようにして発見された関係は、単一の粒子にも適用でき、より一般的には任意の力学的システムにも適用できる。なぜなら、位置と対応する速度の同時測定は、ブラウン運動の結果として最大精度までしか不可能であると述べているからである。我々はこの発見と、力学的的な測定装置による物理量の測定精度を決定する問題との関係について議論し、この場合にも量子力学に類似して、克服できない精度の限界が存在するという結論を得る。最後に、波動力学の観点から、虚数係数を持つ複素関数に成立するシュレーディンガー方程式とは対照的に、古典的な拡散方程式が実拡散係数を持つ実密度関数に成立する理由を明らかにする。また、これが物理量の観測可能性および自然過程の可逆性と不可逆性にどのように関係するかを示す。

以下では、一方では古典的統計 (古典的拡散理論とブラウン運動理論) と量子力学の議論は正式な考慮から生じたものであり、私の知る限りでは、この文脈ではまだ取り上げられていない。すでに一部の人には知られているかもしれないが、特にハイゼンベルクの不確定性関係は古典的な統計によって支配されるプロセスにも引き継がれ、それによって測定装置による測定限界という、よく議論される問題に対する新たな視点について引き継がれる。さらに、私たちは上記の類似点と相違点の物理的な意味をより正確にしようと試みます。

3.1

拡散の古典理論は、一般化拡散方程式によって支配されている¹。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \nabla u - \operatorname{div}(uv) \quad (1)$$

¹例えば、Frank-Mises, Differential-u. Integralgleichungen d. math. Physik 2, 248.

ここで $u(x, y, z, t)$ は位置と時間の関数としての密度、 D (定数と仮定) は拡散係数を表す。変数 v は外力によって生じる対流の速度ベクトルである。この解は与えられた境界条件の下での方程式は、現時点で分布が分かっている場合、将来の任意の瞬間における密度の分布を決定する。

拡散実験を、多数の同一物体の空間的集合体を用いた集団実験として解釈すると、粒子の場合、 $u dV$ は、その集団の任意の要素が体積内で見つかる相対頻度である。集団実験中の時刻 t における要素 dV 、 u がすべての t に対して正規化条件を満たす場合

$$\iiint u dV = 1. \quad (2)$$

空間アンサンブルを仮想アンサンブルに置き換えると、拡散方程式 (1) は個々の粒子の位置の「確率密度」 u の式になる。次の場合、時間の関数として計算できる。時刻 0 では、それは既知である。すなわち、置換により (1) は外部からの力の作用下での個々の粒子の運動に対するスモルコフスキーの微分方程式となる²。

スモルコフスキーの方程式は、任意の力学的システムのブラウン運動に対する非常に一般的な条件の下で導くことができる別の微分方程式の特別な場合であることが示せる。これは通常フォッカー・プランクの微分方程式³ と呼ばれる。シュレーディンガー⁴ によれば、これは方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F u, \quad (3)$$

ここで F はある微分演算子を表し、システムが力の作用下にある粒子である場合 (1) と一致して、 $F = D \nabla - \text{div } v$ に簡約される。

微分方程式 (3) は、シュレーディンガー⁵ も既に指摘しているように、波動関数 ψ に対する波動力学の

時間依存するシュレーディンガーの微分方程式と形式的に同一であり、これは通常次の式のように書かれる。

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (4)$$

ここで、 H は関心のある力学的問題に対するハミルトニアン演算子を表す。

波動力学の統計的定式化によれば、この方程式は「確率方程式」でもある。時刻 0 における $\psi(q)$ の知識から、任意の時刻における同じ量を計算できる。確率振幅 ψ は、 q 空間の特定の体積要素における系に対する確率密度と、以下の関係式

$$w = \psi \psi^* \quad (5)$$

で関連づけられる。 $(\psi$ は ψ の複素共役である) ただし ψ は次の正規化条件を満たす：

$$\iiint \psi \psi^* dV = 1 \quad (6)$$

で関連づけられる。

この推論を逆にすると、(5) で定義される量 w を、 q 空間における多数の同一の非相互作用システムの位相点密度として構築することもできる。式 (4) は、この分布密度の発展を決定し、密度関数が時間 0 に割り当てられている場合は、それ以降の任意の時点での密度を計算できるようにする。

質点 m がポテンシャル U から導かれる力の作用を受ける特別な場合、式 (4) は次のように表される。

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \psi + U \psi, \quad (7)$$

この方程式の議論から、Ehrenfest⁶ が初めて示したように、割り当てられた力が粒子に作用すると、上記の条件に従う粒子クラスターの質量中心は、古典力学の規定に従って通常の 3 次元空間内を移動し、また、粒子クラスターは一種の拡散によって質量中心の周囲に広がることがわかる。したがって、ここでは、古典的な拡散方程式 (1) に従った粒子クラスターの運動と同様に、拡散が重なった対流に遭遇する。

⁶P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. 45, 455, 1927.

²M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 43, 1105, 1915.

³他にも、F. Zernike, Handb. d. Phys. Bd. III, S. 457 などを参照。

⁴E. Schrödinger, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 1931, S. 296ff. S. Ber. Berl. Akad. 1931, S. 148; J. Metadier, CR193, 1173, 1931 も参照。

⁵E. Schrödinger, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 1931, S. 296ff. S. Ber. Berl. Akad. 1931, S. 148; J. Metadier, CR193, 1173, 1931 も参照。[原文のまま]

私たちは最後の現象だけに興味があるので、以下では外力をゼロに設定したいと思う。すると、式 (1) と式 (7) は形式的に同一となり、すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla u, \quad (8)$$

そして

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \nabla \psi, \quad (9)$$

ここでは以下の略記を使う

$$\varepsilon = \frac{i\hbar}{4\pi m}. \quad (10)$$

同じ境界条件と初期条件に従う場合、(8) と (9) の解は完全に同じである。確かに、量子力学の場合、関数 (一般に複素数) ψ ではなく、(5) によればそのノルムが密度関数の役割を果たしており、(10) によれば拡散係数は完全に虚数であるという事実から、実質的な違いが生じる。この事実の物理的な意味については後で説明する。

3.2

第1節での古典的な拡散理論による粒子クラスターの運動と量子力学による粒子クラスターの運動の比較から生じる類似性のより深い理由は、どちらの場合もクラスター内の個々の粒子の速度が異なり、統計法則に従うという事実にある。

前者の場合、この現象は、粒子が周囲の環境の分子と不規則に衝突し、それによって運動量の強度と方向が継続的に変化するため、個別の粒子の運動量の変化に関係がないという事実から生じる。これは、不規則なブラウン運動をしている個々の粒子を考えると明らかになる。粒子クラスターの場合、クラスターに割り当てられた初期状態と、最初はゼロになる「マクロ的に」測定された速度に対して、粒子は実際にはクラスター全体に不規則に分布する速度を持ち、時間の経過とともに初期分布が拡散の特徴的な方法で変化するという事実から、これがわかる。

量子力学の場合、初期密度分布の仮定自体が、すべての粒子の初期速度がゼロになるという条件が厳

密には満たされないことを意味する。量子力学を支配するハイゼンベルクの基本的な不確定性関係によれば、粒子の初期速度の完全な割り当ては、初期位置に関する完全な不確定性が存在する場合にのみ可能である。粒子の初期位置に関するいくつかの情報は初期分布の割り当てによって伝達されるため、クラスター粒子の初期速度の一定のばやけ、つまり初期速度の一定の統計的分布を認める必要がある。一定時間後には、初期の密度分布の変化が、つまり、クラスターの「拡散」が必然的に生じたに違いない。

拡散クラスターの粒子の位置の値に関する不確実性は、実際にハイゼンベルグ⁷ とケナード⁸ などによって導かれた速度 (運動量) の値に関する不確実性を伴うハイゼンベルグの不確定性関係を満たす。ここでは1次元の簡単な導出を示す。この場合、変換理論に頼らずに、式 (9) とその複素数共役のみを利用し、1次元では次の形をとる⁹：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}. \quad (11)$$

x_0 をクラスター内の1つの粒子の初期位置、 v をその初期速度、 x を時刻 t 後の位置とすると、

$$x = x_0 + vt \quad (12)$$

が成り立つ。時刻0における質量の中心が座標の原点にあり、その速度が0である場合、すなわち $x_0 = 0$ かつ $\bar{v} = 0$ の場合、(12) によれば、すべての t に対して $\bar{x} = 0$ であることも明らかである。期待値を評価すると、(12) の2乗は

$$\overline{x^2} = \overline{x_0^2} + 2\overline{x_0 v} t + \overline{v^2} t^2 \quad (13)$$

定義上

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi \psi^* dx \quad (14)$$

⁷W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 43, 172, 1927.

⁸E. H. Kennard, loc. cit. 44, 326, 1927.

⁹ここで、いくつかのヒントを提供してくれたブラハのオーナー、K. Löwner 氏に感謝したいと思います。

が成り立つ。式 (11) を用い、 ψ が無限大で十分速く消滅するという仮定のもと、(14) の助けを借りて簡単な計算すると、

$$\frac{d}{dt} \overline{x^2} = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx, \quad (15)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{x^2} = -8\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx, \quad (16)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \overline{x^2} = 0. \quad (17)$$

(17) から、 x^2 は (13) と一致する時間の 2 次関数でなければならないことが分かる。また、(16) から (13) の t^2 の係数として $\overline{v^2}$ は

$$\overline{v^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{x^2} = -4\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx \quad (18)$$

を満たすことがわかる。ハイゼンベルグ¹⁰によれば、自明な不等式 (19)：

$$\left| \frac{x}{2x^2} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 \geq 0. \quad (19)$$

から次の式が導かれる。(6) と (14) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx \geq \frac{1}{4x^2}.$$

(18)¹¹ から

$$\overline{x^2} \cdot \overline{v^2} \geq -\varepsilon^2. \quad (20)$$

関係式によって、検討中の粒子群の位置と運動量に不確実性を導入すると、

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}},$$

$$\Delta p = m \sqrt{\overline{v^2}}. \quad (21)$$

(20) と (10) を組み合わせると、それらの積はハイゼンベルグの関係式に従う：

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (22)$$

¹⁰W. Heisenberg, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1930. Page 13 and following.

¹¹ドイツ語の原文では (17) を参照しているが、これは査読者の指摘通りタイプミスであるはずだ。

ここで等式が成立するのは、不等式 (19) が等式として成立する場合のみである。後者を積分すると、

$$\psi = \text{定数} e^{-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}}. \quad (23)$$

そして、粒子クラスター (5) の密度については、(6) を考慮すると、ガウス分布が得られる。

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}. \quad (24)$$

もし ψ が $t = 0$ の時点で特別な形 (23) をとるなら、(15) から $\frac{d\overline{x^2}}{dt} = 0$ となり、その結果 (13) から t の係数は消える。検討中の粒子クラスター内の対応する位置の初期分布があり、その結果 $(\overline{x_0 v}) = 0$ も同時に成り立つなら、個々の¹² 粒子の位置の分散と初期速度も互いに統計的に独立している。逆に、密度分布 (24) がゼロの時点で存在するということは、それ自体で位置と速度の統計的独立性を意味しておらず、したがって (13) の線形項が消えることも意味していない。

3.3

§ 1 の冒頭で述べたように、量子力学の場合のハイゼンベルクの不確定性関係に基づく上記の推論を、古典的な拡散の場合に適用するのは自然である。この場合も、対流が消える 1 次元の場合に限定する。まず、方程式 (8) から始める。これは 1 次元では次のようになる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (25)$$

ここで、(2) と一致して、 u は以下の条件を満たす：

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = 1. \quad (26)$$

粒子クラスターの不確実性は量 $\overline{x^2}$ によって次のように定義される：

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u \, dx = 1. \quad (27)$$

¹²TN: 原文では「単一」粒子と書かれていますが、これはおそらくタイプミスです。

$t = 0$ では、クラスターの質量中心は再び座標の原点に位置し、 $\bar{x}_0 = 0$ となる。まず、我々は、式 (13) の類似の導出を求める。これは、最初に存在する不確実性 $\bar{x}^2$ が、拡散粒子群は時間の経過とともに成長する。式 (25) と u がゼロになるという仮定を用いると、無限遠で十分に速い場合、

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x u \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \\ &= D \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dx = 0. \end{aligned}$$

したがって、クラスターの質量中心は静止したままであり、これは対流が存在しないことから明らかなので、すべての時間で $\bar{x} = 0$ となる。

同様に、(27) から次のことが分かる：

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^2}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \\ &= D \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dx = 2D. \end{aligned} \quad (28)$$

したがって、 $\bar{x}^2$ は時間の線形関数であり、

$$\bar{x}^2 = \bar{x}_0^2 + 2Dt. \quad (29)$$

(29) と (13) を比較すると、どちらの場合も位置の不確実性は十分に長い時間でクラスターの拡散が起こる。ここで $\bar{x}^2$ の成長は $\bar{x}_0^2$ と独立して起こる。そして時間に対して線形であるのに対し、それ以前は時間に対する成長は 2 次関数であり、(20) のため、それ自体が $\bar{x}_0^2$ に従属している。特に突然起こるのは、 $\bar{v}^2$ が無限に大きくなるため $\bar{x}_0^2 = 0$ となる。最後に、もし t の線形項はゼロではないので、位置と速度の分散は統計的にゼロ時点で独立している場合、クラスターはまず最小値まで収縮し、その後外へ広がる可能性がある。

これらの違いの正式な原因については、すでに第 1 節の最後で議論した。それらは物理的にこれは、古典的な拡散の場合、粒子の「初期速度」が存在しないという事実によって説明され、したがって (12) の形方程式は存在しない。さらに、粒子の瞬間速度は、すでに述べたように、周囲の環境中の分子の統

計的独立性に基づいて¹³、分散過程と古典的なケースの初期分布については、式 (29) をすぐに書き下すことができる。実際、この式は、分散が初期分散と拡散という 2 つの原因によるものであることを表している。これは、 x の「平均二乗誤差」がこれら 2 つの要素の合計であるという事実に対応しており、後者は、ブラウン運動の平均二乗誤差に関するよく知られた アインシュタインの法則である。

不確定性関係 (20) から (22) の類似物を見つけるためには、まず古典的拡散の速度に対する適切な定義を見つける必要がある。以上のことから、この役割は分子衝突によって生じる微視的速度によることはありえない。同様に、単一の実体として、または厳密に言えば、その質量中心の速度とみなされるクラスターの巨視的速度は、消えてしまうので、良い候補ではありません。適切な量は「拡散流」、つまり拡散領域内の単位面積を単位時間内に通過するベクトルである、拡散する物質の量を考慮することで得られる。よく知られているように¹⁴、拡散流 Q は拡散領域における局所関数であり、スカラー u と次の関係で結びついている。

$$Q = -D \text{grad} u. \quad (31)$$

u は拡散物質の密度に他ならないという事実に基づいて、対応する速度ベクトル $\vec{v}$ は次のように求められる。

$$\vec{v} = \frac{1}{u} Q = -D \frac{1}{u} \text{grad} u. \quad (32)$$

これは 1 次元の場合は次のようになる。

$$v = \frac{1}{u} Q = -D \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (33)$$

¹³もしシュレーディンガー (Ber. Ber. 1930, S. 296, Nr. 19) に従って、 $\bar{x}_0^2$ の値をできるだけ Δx が小さくなるように選択し、さらに積 $\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi}$ が成り立ち、初期分布が (23) で与えられるように選択するとすると、(13) において、右辺の 2 番目の項は消え、 $\bar{v}^2 = -\frac{\varepsilon^2}{x^2}$ とすると 1 番目と 3 番目の項は等しくなる。これは次のことを意味する。 $\bar{x}^2$ に対して

$$\bar{x}^2 = \frac{h}{2\pi m} t. \quad (30)$$

この場合、式 (29) との形式的な類似性は、(10) に従って D を「虚数の拡散係数」 ε の絶対値に置き換えることで、驚くほど明らかになる。

¹⁴文献 1 と比較してください。

ここで、ある瞬間における粒子群の v の平均値を計算すると、定義により、(25) を用いて次の式が得られる。

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} vu \, dx = -D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = 0.$$

それは当然のことである。なぜなら、 v は質量中心の巨視的速度だからである。

v^2 の平均値については、

$$\overline{v^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 u \, dx = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx. \quad (34)$$

第2節の推論をそのまま適用すると、自明な不等式から再度進むことで、積 $\overline{v^2} \cdot \overline{x^2}$ の不等式を確立することができる：

$$\left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{x^2} \right)^2 \geq 0. \quad (35)$$

積を展開すると、

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \geq -2 \frac{x}{x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^2 u}{(x^2)^2}.$$

積分すると、(26) と (27) を使った簡単な計算で次の式が得られる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx \geq \frac{1}{x^2}.$$

最終的に (34) によれば

$$\overline{x^2} \cdot \overline{v^2} \geq D^2. \quad (36)$$

見ての通り、不等式 (36) は不等式 (20) と同じ形をしており、 ε の絶対値を D に置き換えると不等式 (36) になる。(21) と同様に Δx と Δv の表記を導入すると、不確定性関係をより単純な形で書くことができる。

$$\Delta x \cdot \Delta v \geq D. \quad (37)$$

古典的に拡散する粒子クラスターでは、任意の瞬間における粒子の位置と速度を任意の精度で同時に決定することはできず、さらに、不確定性の積は常に拡散係数 D よりも大きくなければならないことを述べている。

下限が達成される、すなわち不等式が等式に変わるのは、(35) が等式のときだけである。このようにして得られた微分方程式の解は、直ちに次の式となる：

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\pi} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}. \quad (38)$$

(26) を考慮に入れると、これも量子力学の場合と同様にガウス分布となり、(24) と形式的に一致する。

この場合、 $\Delta x \Delta v = D^{15}$ という等式は分布 (38) の発生から必然的に導かれるが、以前は分布 (24) の発生は積 $\Delta x \Delta v$ が最小値に達するための必要条件ではあったが十分条件ではなかった。さらに、粒子のクラスターが放置され、時間ゼロで最小不確定条件を満たす場合、この条件はそれ以降のどの時間でも維持される (分布 (38) は自己維持的であるため) のに対し、量子力学的な場合、最小条件は一時的にのみ満たされ、たとえば時間ゼロでのみ満たされ、それ以降は再び満たされることはない (分布 (23) の形状は粒子の運動によって維持されないため)。最後に、古典的な場合、最小条件を満たす粒子のクラスターは、ある瞬間に座標の原点に完全に集中していたクラスターの拡散によってもたらされるものと常に考えることができることを強調しておく必要がある。これを見るには、(29) を (38) に代入し、 $\overline{x_0^2} = 2Dt_0$ という略記を挿入するだけでよい。

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t+t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4D(t+t_0)}}. \quad (39)$$

これによって、確かに $t = -t_0$ の場合、 u は $x = 0$ を除いて全空間で消える。量子力学の場合には、すでに述べたように、この縮小は不可能である。

3.4

前の2つの段落では、量子および古典的ケースにおける同一粒子の空間集合体への不確定性関係の適用について論じた。よく知られているように、量子力学における不確定性関係の基本的な重要性は、個々の

¹⁵TN: ドイツ語の原文では $\Delta x \Delta v = 0$ と書かれていますが、これは明らかにタイプミスです。

システムに適用されたときに現れる。これは、力を受けない粒子の位置と運動量の同時測定が、式 (22) で予測される最大精度 $\hbar/4\pi$ で実行できることを示している。これは、2つの量のうちの1つの測定プロセスが、両方の量の不確定性の積がこの値より小さくならない程度に他方を乱すからである。一般的な力学的システムに対するこの記述を再定式化すると、座標 q とそれに正準共役なインパルスの同時測定は、 $\hbar$ の大きさのオーダーの不確定性でのみ可能である、と述べることができる。

ここで、第1節で得られた関係式 (37) を、不規則な衝突を受けてブラウン運動をする粒子の位置と速度の同時測定の問題に、直接的に適用することもできる。この関係式は、位置と速度の同時測定の不確定性の積が値 D より小さくなることはないことを意味しており、ここで速度は粒子のマクロな速度、すなわち量 $\delta x/\delta t$ として理解されなければならない (δt は粒子の2つの連続する分子衝突間の時間に比べて大きいと仮定)。量子力学の場合と同様に、位置と速度の両方を同時に正確に測定することは実際には不可能であることがわかる。これは、量子力学の場合のように、測定プロセス自体によって決定され、普遍的な定数によって支配されるのではなく、むしろ観測されるシステムに対する環境の影響によって引き起こされる。したがって、これは明らかに普遍的な性質のものではない (たとえば、温度を下げることで効果を任意に小さくすることができ、これによって値 D が決まる)。

次の議論は、式 (37) が個々の粒子の測定の場合にも当てはまることを示している。ここでは、時間ゼロで座標の原点に位置し、マクロな速度がゼロである力のない粒子を考える。短時間 t 後に粒子の位置を測定すると、期待値 $\overline{x^2}$ はアインシュタインの式:

$$\overline{x^2} = 2D t. \quad (40)$$

を満たす。そこから

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{x^2}}{2} = D$$

ここで時間微分と平均の順序を入れ替えると¹⁶、

$$\overline{\left(\frac{d}{dt} \frac{x^2}{2}\right)} = \overline{\left(x \frac{d}{dt} x\right)} = D \quad (41)$$

ここで、 x は明らかに、ブラウン運動によって引き起こされる粒子の位置の不確定性 (時間0で $x=0$ と仮定) であり、同様に dx/dt は同じ原因によって引き起こされる速度の不確定性 (時間0でゼロになると仮定) である。したがって、積 $\overline{\left(x \frac{d}{dt} x\right)}$ は、不確定性積 $\Delta x \Delta v$ の多数の測定の平均の期待値を指定し、式 (41) によると D に等しくなる。不等式 (37) の代わりに正確に下限が得られたのは、粒子の繰り返し測定の平均を評価したためである。粒子は常に同じ開始位置と速度を持つと仮定した。この仮定がなければ、不確定性は増加するだけであり、関係式 (37) で要求されるように、積 $\Delta x \Delta v$ は実際には D よりも大きくなることがすぐにわかる。

この関係式は、ブラウン粒子の位置の測定精度が向上すると、その速度の同時測定の精度が低下し、その逆も同様であることを示している。このステートメントの物理的な意味は、次の図 1、2、3、および 4 を使用して視覚化できる。図 1 は、特定の倍率で観測された、液体中を重力下で落下する粒子の位置 $x(t)$ を時間の関数としてプロットしたものである。図 2 は、図 1 の粒子からの関数 $v(t) = \dot{x}(t)$ を表している。図 3 は、図 1 の冒頭部分を拡大してプロットしたもので、図 4 は対応する速度曲線を示している。

倍率を上げることで位置決定の精度を上げると、必然的に速度の不確定性も高まることがすぐにわかる。この関係式は、ブラウン運動に詳しい人なら誰でも知っている事実を正確に表している。つまり、ブラウン粒子の軌道は、倍率が上がると不連続性が多くなるということである。

量子力学の場合と同様に、不確定性関係 (37) を、周囲の「熱浴」¹⁷ と接触しているあらゆる種類の一般的な力学的システムに拡張することができる。す

¹⁶ TN: ここでの確率微分はストラトノビッチの意味で解釈されなければなりません。

¹⁷ 【注】著者は temperature bath(温度浴) と書いているが、日本語では「熱浴」にあたる。

ると、すべての自由度は、対応する座標のブラウン運動に関連付けられ、これを再び x で表わす。

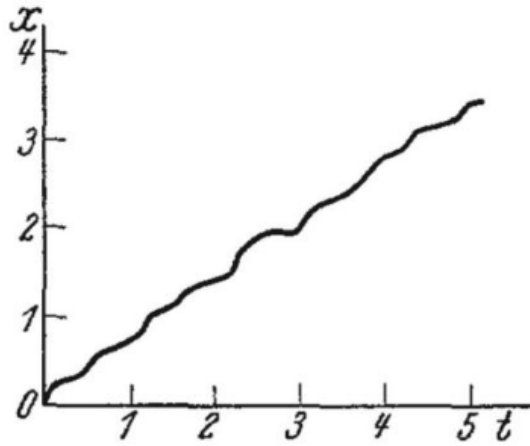


図 1: ブラウン粒子の位置を時間の関数としてプロットしたもの (模式図)

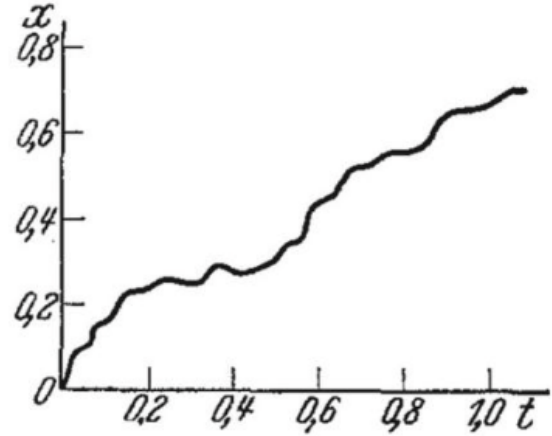


図 3: 図 1 のプロットの始まりの 5 倍拡大図 (模式図)

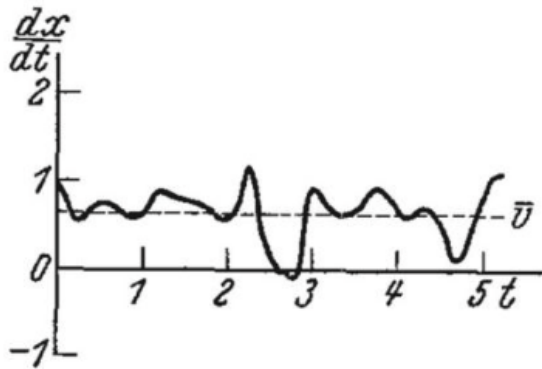


図 2: 図 1 から計算された時間の関数としての粒子の速度 v (破線: 平均値 $\bar{v}$)

フォッカー・プランク方程式 (3) は微分方程式 (25) または (8) に代わる。この一般的な次のような不確定性関係が成り立つ場合

$$\Delta x \Delta v \approx D \quad (42)$$

が成り立ち、ここで v は座標 x に関連付けられた速度であり、 D は (3) の右辺の項 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の係数を表し、こ

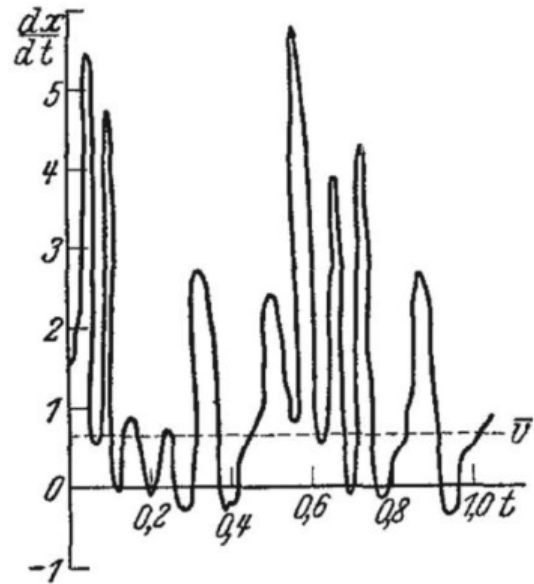


図 4: 図 3 から計算された速度 v (破線: 平均値 $\bar{v}$)

のブラウン運動の特性定数を表す。関係式 (42) は、座標 x とそれに関連する速度 v の同時測定は、不確実性は D のオーダーである。

3.5

式 (42) の有効範囲を、任意の非力学的量に拡張することができる。なぜなら、任意の物理量、非力学的な性質のものであっても、力学的な測定機器を使用して測定されるからである。たとえば、電流はガルバノメータを使用して測定された、力学的部品で構成される。「たわみ」 x 力学的装置の変位は測定すべき量 J に比例する (例えば、ガルバノメータは電流の強さに比例する)。これが最初から当てはまらない場合は、狭い範囲内で望ましい条件を実現するために、常に補償法を適用する。 $\dot{J}$ を J の時間変化率としよう。すると、

$$J = ax, \quad \dot{J} = a\dot{x} = av,$$

$$\Delta J = a\Delta x, \quad \Delta \dot{J} = a\Delta \dot{x} = a\Delta v,$$

そこから (42) の助けを借りて

$$\Delta J \cdot \Delta \dot{J} \approx a^2 D.$$

関係式 (43) は、適切な測定装置を具体的には減らすことによって、単にポイントの読み取り精度を高めることによって量 J とその時間変化率の同時測定の精度を向上させることはできない測定器のブラウン運動により、ある値を超えると、所定の機械的特性を有する可動コイル型ガルバノメータの磁場を強化し、その結果、少なくとも原理的には、電流測定の精度を任意に向上させることができる。しかし、単純に読み取り精度を上げることによって、例えば、顕微鏡の読み取りポイント¹⁸、熱リレー¹⁹、または軽電機リレー²⁰ を使用して、積 $\Delta J \cdot \Delta \dot{J}$ を減少させることはできない。

機器のブラウン運動による測定精度の限界の問題ガルバノメータは、特に、最近、複数の著者²¹ によって繰り返し議論されており、どのような手順で、特定のタイプの機器を使用して、関心のある量を可能な限り正確に測定できるか徹底的に議論されている。私の意見では、これらの議論は常に重要な点を見落としている。実験者の仕事は、関心のある量 J を時間の関数、つまり関数 $J(t)$ として可能な限り最高の精度で記録することである。注意を短い時間間隔に限定すると、この要件は、特定の瞬間に量 J とその変化時間率 $\dot{J}$ を可能な限り最高の精度で決定する仕事と同等である。関係式 (43) は、特定の機器では、指針の読み取り精度を向上させる手順とはまったく関係のない不確実性でのみこれが可能であることを示している。

多くの著者が、ブラウン運動にもかかわらず J の測定精度を高めるために提案している手順、つまり、多数の測定値を取得してその平均を計算する (その場合、個々の測定よりも精度が高くなるはず) か、積分測定機器を使用する方法は、対象の量が正確に一定であることが事前にわかっている場合にのみ意味を持つ。しかし、まず対応する測定を実行してそのような条件を確かめずに、これをどうやって知ることができるだろうか。実際にこれを試みると、繰り返し観察するか、連続記録することによって、ポインターの偏向の時間依存性 (ブラウン運動のため) が得られるが、そこからは、観察された量が一定のままであったのか、それとも記録された変動の精度の限界内で時間とともに変化したのかを判断することは絶対に不可能である。この悪循環が、測定精度を高めるために提案されている方法が実際には実行可能でない理由である。

実際、前述の手順によって暗示される J の不変性の要件は確実に満たされていないと言える。なぜなら、マクロ測定機器によって測定できるマクロ的に定義された量はすべて変動するからである。たとえば、現実には、電子の熱運動によって誘発される電位

¹⁸G. Ising, Ann. d. Phys. 14 755, 1932.

¹⁹N. Moll and N. Burger, Phil. Mag. 1, 624, 1925.

²⁰L. Bergmann, Phys.ZS. 32, 688, 1931.

²¹G. Ising, Phil. Mag. 1, 827, 1926; Ann. d. Phys. 8, 911, 1931; 14, 755, 1932; F. Zernike, ZS. f. Phys. 40, 628, 1926; 79, 516, 1932; R. Gans, Schriften d. Königsberger Gel. Ges. 7, 177, 1930; M. Czerny, Ann. d. Phys. 12, 993, 1932.

の自発的な変動が発生するため、電源が可能な限りの精度で外部干渉から保護されているとしても、一定の起電力は確かに存在しない。これは、過去数年にわたって複数の研究者によって実験的に示されている²²。したがって、可能な限り最高の精度で起電力を測定するには、その時間依存性を可能な限り正確に記録するか、短い時間間隔で起電力とその変化速度を同時に測定する必要がある。ただし、上記で示したように、この精度には、ブラウン運動の結果として、測定の実行方法とは無関係に上限がある。

3.6

これまでの段落で報告した結果は、繰り返し述べてきたように、古典的な拡散理論と量子力学の基本微分方程式の間の形式的な類似性によるものであり、この事実は、第1節の式(8)と(9)を対比すると特に明らかになる。すでにそこで、2つの方程式の本質的な形式的な違いを指摘した。ここでは、これらの違いの物理的な起源を理解しようとする。以下の考察は、物理学者にこれらの問題に取り組むよう促すと同時に、最近エーレンフェスト (Ehrenfest) によって強調された特定の曖昧さを明らかにするのにも役立つはずである。

古典的な拡散は、第1節で見たように、(3)の形式の微分方程式によって支配される電流と見なすことができる。ここで、 F は実微分演算子であり、 u は拡散する物質の密度を表す位置と時間の実関数である。したがって、任意の瞬間に u が与えられると、それ以降の任意の瞬間 (もちろん、それ以前の瞬間も) の密度分布を計算できるはずである。通常の流体力学の問題とは対照的に、検討中のシステム内の拡散電流は、任意の瞬間に密度を座標の関数として割り当てただけで完全に決定され、同時に座標の関数としての電流速度を知る必要はない。これは、式(32)で定義される電流速度が u と座標のみの関数で

あり、システムの履歴に依存しないという事実によるものである。したがって、 $u(x, y, z)$ が既知であれば、 $v(x, y, z)$ も指定され、したがって、次の時間ステップにおけるシステムの進化は、古典的な流体力学の意味で完全に決定される。

また、拡散係数 D は分子理論上の意味により正定値であるため、式(3)の t と $-t$ の交換である時間反転操作は不可能であることにも注意して欲しい。したがって、拡散プロセスは「不可逆」である。これは、与えられた u の速度電流が位置のみの関数であるという事実からも明らかである。つまり、初期速度は可逆ではなく、周囲の分子との衝突によってのみ決定される。

量子力学の場合、状況は全く異なる。ここでは、粒子の運動は周囲の物質の分子との衝突によって妨げられないため、粒子クラスターの運動は、基本的に粒子の初期位置と速度によって決まる。したがって、古典的な拡散の場合と同じように、密度関数 w の微分方程式は存在しないことは明らかである。逆に、(4)の形の方程式が成り立つことは、波動力学の観点から最も簡単に理解できる。この視点から見ると、粒子クラスターは「波束」、つまり、次の形の調和部分波の重ね合わせ：

$$\psi_k = \varphi_k e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}.$$

を形成する。ここで考慮する境界条件では、その数は連続体の濃度を持つ。ここで、 φ_k は「振幅関数」を表し、以下の形式の位置の複雑な関数である：

$$\varphi_k = a_k e^{iS_k}.$$

これは位置の2つの実関数、振幅 a_k ²³ と位相 S_k を含む。すべての a_k と S_k を位置の関数として割り当てると、微分方程式(4)の結果として、特定の瞬間だけでなく、それ以降の (または以前の) すべての瞬間における対象波束が完全に指定される。これは物理的に明らかである。なぜなら、各部分波の運命は時間ゼロでの振幅と位相の指定によって決定され、したがって部分波の干渉によって作成された波束の運

²²J. B. Johnson, Phys. Rev. 29, 367, 1927; 32, 97, 1928; N. H. Williams, ibidem 40, 121, 1932; L. S. Ornstein, H. C. Burger, J. Taylor and W. Clarkson, Proc. Roy. Soc. London (A) 115, 391, 1927.

²³TN: このこと下の元のテキストは A_k です。

命も決定されるからである。波動場の状態を記述するには、2つのスカラーまたは1つの複素関数(シュレーディンガー関数)が必要であることがすぐにわかる。

検討中のクラスターの密度(ここでは粒子の観点から考察)は、式(5)に従って $|\psi|$ によってのみ指定されるため、位置の関数としての ψ の割り当ては、特定の瞬間における粒子の「位置」の分布よりも詳細な情報を伴う。前述のように、クラスターの運命は ψ によって決定されるため、 ψ の割り当てには、特定の瞬間における速度の分布に関する情報も含まれていることは明らかである。逆に、初期速度が不明である場合、初期分布のみから粒子クラスターの運動を予測することは不可能である。2 実際、 $|\psi|$ の微分方程式は存在しない。しかし、密度 $w = |\psi|$ または仮想エンティティとして解釈される位置の確率密度のみが観測可能であり、 $|\psi|$ 自体は観測できない。この逆説的な状態は、不確定性関係の結果としてすぐに説明できる。 ψ が実際に観測可能であれば、私たちの議論によれば、位置と速度の分布が粒子クラスターに同時に割り当てられることになるが、これは不可能である。

式(4)の左辺の係数が純虚数であるか、または式(9)の拡散係数 ε が純虚数でなければならないという事実は、次のようにしてわかる。任意の瞬間に、すべての部分波の位相 S_k が180度反転すると、すべての φ_k が φ_k^* に変わり、したがって ψ が ψ^* に変わる。しかし、同時に、すべての位相が反転することは、すべての波動過程が逆方向に変わるか、波束の運動が完全に反転することを意味する。 ψ とその共役複素値 ψ^* の交換は時間の反転に他ならず、したがって、 ψ が満たす微分方程式(4)は、 ψ を ψ^* に、 t を $-t$ に同時に置き換えても変化しない。これは、実際には、ハミルトニアン演算子 H が時間に依存しない場合、 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ の係数が純虚数である場合のみ可能である。虚数拡散係数の出現は、シュレーディンガーがすでに指摘したように²⁴、単に量子力学的「拡散」が古典的なものとは対照的に可逆的である

ことを意味するだけであり、この矛盾は、式(13)と(29)の相違点に関する議論の一部として、第2節と第3節ですでに強調されている。

プラハ、1933年1月。

謝辞：

翻訳と論文全体の改善方法について非常に役立つ多くの提案をしてくださった匿名の査読者に心より感謝いたします。また、脚注を使用して原稿の誤字を指摘するというアイデアをくださった査読者にも感謝いたします。原稿と一緒に注意深く読み、英語の質を向上させるための貴重な提案をしてくださった理学修士のジュリア・サンダース氏(Julia Sanders)にも深く感謝いたします。

資金情報：

ヘルシンキ大学中央病院を含むヘルシンキ大学が提供するオープンアクセス資金。

オープンアクセス：

この記事は、クリエイティブ・コモンズ・アトリビューション 4.0 国際ライセンスに基づいてライセンスされています。このライセンスは、元の著者と情報源を適切にクレジットし、クリエイティブ・コモンズ・ライセンスへのリンクを提供し、変更があった場合はその旨を記載する限り、あらゆるメディアや形式での使用、共有、翻案、配布、複製を許可します。この記事内の画像やその他の第三者の素材は、素材のクレジットラインに別途記載がない限り、記事のクリエイティブ・コモンズ・ライセンスに含まれています。素材が記事のクリエイティブ・コモンズ・ライセンスに含まれておらず、意図する使用が法定規制で許可されていない、または許可された使用を超える場合は、著作権所有者から直接許可を得る必要があります。このライセンスのコピーを表示するには、<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>にアクセスしてください。

翻訳上の注意書き

²⁴Erwin Schrödinger, loc. cit., ref 5.

A.1 K. Löwner への謝辞

量子不確定性関係の導出に関するヒントについて、ヒュルト (Fürth) が K. レーナー (K. Löwner) に感謝していることは興味深いです。カレル・レーナー (Karel Löwner)[米国移住後はチャールズ・レーナー (Charles Loewner) としても知られる] は、等角写像に関する研究により、現在「レーナー微分方程式 (Loewner Differential Equation)」として一般に知られるものの発見につながった数学者です。彼の研究の確率論的拡張は、確率的レーナー方程式 (Stochastic Loewner Equation)、またはシュラム-レーナー進化 (Schramm-Loewner Evolution, SLE) であり、2 次元臨界システムのインターフェースを記述するマルコフ過程の族です。SLE の研究は、過去 20 年間にわたって物理学と数学の両方のコミュニティで大きな注目を集めてきました (例えば、[23,24] を参照)。

B 解説

以下では、ウィーナー過程によって駆動される確率微分方程式の言語で、フルトの不確定性関係の導出を再構成します。次に、これらの不確定性関係と、熱力学的不確定性関係 (TUR) と呼ばれる、変動する古典的なナノシステムにおける電流、その分散、エントロピー生成に関する普遍的な不等式との類似点と相違点について示唆します。また、I. Fényes [25] がフルトによって得られた関係の一般性を強調し、ネルソンの「確率力学」プログラムとパリシ-ウー確率量子化法への道を開いたことを強調します。

B.1 ブラウン運動の連続性

ブラウン運動の現在の理論に基づくフルトの結果の質的な理解は次のようになります。ブラウン運動の経路は、確率 1 で指数 $1/2$ のヘルダー (Hölder) 連続です。これは、それらの経路がどこでも微分可能ではないことを意味します。結果として、粒子位置の解像度が増加するブラウン運動粒子を観察すると、同時に、軌道の導関数が無限に増加することが記録されます。

B.2 不確定性関係の一般的な導出

ここでは、フルトの不確実性関係のフェニユス (Fényes)[25] による一般化を導出します。導出において、量子力学には一切言及しません。代わりに、不確実性関係は動的システムのランダム性の指標であるというフルトの視点に従います。このように、不確実性関係は一般的に確率過程に適用でき、

「測定装置による測定限界の問題」

と古典的な文脈でも同様です。導出には、現代の確率過程理論で一般的な表記法 [26,27] を使用します。読者の便宜を図るため、現代の表記法をフルトの表記法と明示的に関連付けられます。古典的な確率過程における不確定性関係の一般的な出現に関するより完全な数学的議論については [28] を参照し、ネルソンの確率力学 [31] にもっと近い動機づけを受けた以前の扱いについては [29,30] を参照します。まず、拡散経路の確率論的流速の定義と、それがフォッカー・プランク方程式の「係数」とどのように関係しているかを思い出します。

まず、拡散経路の確率論的流速の定義と、それがフォッカー・プランク方程式の「係数」とどのように関係しているかを思い出します。

以下のドリフトを伴う確率過程 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ を考えてみましょう：

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \lim_{s \searrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{\mathbf{X}_{t+s} - \mathbf{X}_t}{s} \middle| \mathbf{X}_t = \mathbf{x} \right). \quad (\text{B.1})$$

および拡散

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, t) = \lim_{s \searrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{(\mathbf{X}_{t+s} - \mathbf{X}_t) \otimes (\mathbf{X}_{t+s} - \mathbf{X}_t)}{s} \middle| \mathbf{X}_t = \mathbf{x} \right). \quad (\text{B.2})$$

ドリフトと拡散の定義を書く際に、確率過程の確率測度に関する期待値を表すために記号 $\mathbb{E}$ を使用しました。言い換えると、 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が任意のテスト関数であり、 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ が完全なユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の値を取る場合、

$$\mathbb{E}f(\mathbf{X}_t) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t).$$

またはフルト記法では

$$\bar{f} = E f(\mathbf{X}_t).$$

期待値 (B.1)、(B.2) は、時刻 t において確率過程が値 x をとるという条件に従います。

先に進むために、ドリフトと拡散の両方が $\mathbb{R}^d$ において規則性を持ち、遷移確率密度 $\mathcal{T}$ はコルモゴロフ順方向分布 (フォッカー・プランク分布) を満たします。

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) + \partial_x \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr } \partial_x \otimes \partial_x \mathbb{D}(\mathbf{x}, t) \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

および逆方程式 [26]

$$\begin{aligned} & \partial_s \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, s) \cdot \partial_y \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr } \mathbb{D}(\mathbf{y}, s) \partial_y \otimes \partial_y \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

どちらも任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $t \geq s \geq 0$ に対して時間境界条件:

$$\lim_{t-s \searrow 0} \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

に従います。このような場合、時刻 0 における妥当なデータ $p_t(\mathbf{x})$ から発展する確率過程 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ の確率密度:

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{y} \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, 0) p_t(\mathbf{y}), \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{B.5})$$

はフォッカー・プランク方程式を満たし、マルコフ性:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{y} \mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) p(\mathbf{y}, s), \\ &\forall t \geq s \geq 0, \end{aligned}$$

を有します。これらの仮説の下では、現在の速度は時間対称増分の条件付き期待値として定義される (例えば、[4] を参照)。

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lim_{s \searrow 0} E \left(\frac{\mathbf{X}_{t+s} - \mathbf{X}_{t-s}}{2s} \middle| \mathbf{X}_t = \mathbf{x} \right). \quad (\text{B.6}) \quad \text{および}$$

流速は、フルトが拡散速度と呼ぶもの、すなわちフルトの論文の式 (32) で定義された量の現代的な名前です。

条件付き期待値 (B.6) の評価は、

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2p(\mathbf{x}, t)} \partial_x (\mathbb{D}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{B.7})$$

ここで、 p は $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ の確率密度です。(B.5) の結果として、流速は確率過程の初期分布と遷移確率密度 $\mathcal{T}$ に依存することを強調する必要があります。この意味で、現在の速度は確率過程の積分量であり、初期データに依存しない局所量であるドリフト (B.1) とは対照的です。

(B.7) は、確率と前方 $\mathcal{T}$ と後方 $\mathcal{T}_R$ の遷移確率の間のコルモゴロフの「時間反転関係」を使って以下の関係式を証明できます:

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_R(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t+s) p(\mathbf{x}, t+s) \\ &= \mathcal{T}(\mathbf{x}, t+s | \mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

実際、私たちの仮説によれば、恒等式

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_{t-s}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{y} \mathbf{y} \mathcal{T}_R(\mathbf{y}, t-s | \mathbf{x}, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{y} \mathbf{y} \frac{\mathcal{T}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t-s) p(\mathbf{y}, t-s)}{p(\mathbf{x}, t)} \end{aligned}$$

が成り立ちます。すると、 y の関数として密度はフォッカー・プランク方程式に従い、遷移確率はコルモゴロフの逆方程式 (B.4) を満たすことがわかり、(B.7) が得られます。

(B.7) の注目すべき結果は、密度 $p(\mathbf{x}, t)$ が満たすフォッカー・プランク方程式に対応する流速の項は質量連続方程式を与えます:

$$\partial_t p(\mathbf{x}, t) + \partial_x \cdot \{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)\} = 0.$$

ここで、 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ の位置と流速の確率過程の分散の積を考えてみましょう。

$$\text{Var } \mathbf{X}_t = \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{x} - E \mathbf{X}_t\|^2,$$

$$\text{Var } \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)\|^2.$$

フルートの記法では

$$\text{Var } \mathbf{X}_t \equiv (\Delta \mathbf{X}_t)^2.$$

コーシー・シュワルツの不等式は、直ちに

$$(\text{Var } \mathbf{X}_t)(\text{Var } \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \geq \left| \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X}_t) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \right|^2. \quad (\text{B.8})$$

次に(密度が無限遠で十分速く消滅すると仮定して)

$$\mathbb{E} \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t) = \mathbb{E} \mathbf{b}(\mathbf{X}_t, t).$$

を用いて、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X}_t) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X}_t) \cdot \\ & \left(\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \mathbf{b}(\mathbf{X}_t, t) - \frac{1}{2p(\mathbf{x}, t)} \partial_x (\mathbb{D}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)) \right) \end{aligned}$$

と書けます。したがって、次の不等式に到達します。

$$(\text{Var } \mathbf{X}_t)(\text{Var } \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \geq \left| \mathbb{E} (\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{b}(\mathbf{X}_t, t)) \cdot \mathbb{E} \mathbf{b}(\mathbf{X}_t, t) - (\mathbb{E} \mathbf{X}_t) \cdot \frac{1}{2} \mathbb{E} \text{Tr} \mathbb{D}(\mathbf{X}_t, t) \right|^2. \quad (\text{B.9})$$

この不等式はフェニユス (Fényes) [25] によるものです。フルートの結果はドリフトが無視できる場合、すなわち $\mathbf{b} = 0$ の場合に再現され、関係は次のように簡略化されます：

$$(\text{Var } \mathbf{X}_t)(\text{Var } \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \geq \frac{1}{4} \left| \mathbb{E} \text{Tr} \mathbb{D}(\mathbf{X}_t, t) \right|^2. \quad (\text{B.10})$$

確率的観点からは、ドリフトがゼロになるということは、確率過程 $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ がウィーナー過程の局所マルチンゲールであることを意味します [27]。追加の正則性仮定により、マルチンゲール特性、つまり

過程の期待値が統計的保存則に従うという事実が得られます。実際、ドリフトがゼロにならない一般的な確率過程であっても、形式 (B.10) の不等式に達する可能性があります [28]。後者の場合、不等式は平均値マルチンゲール特性を持つ過程の任意の観測量に対して成立し、したがって平均的に保存されます。

一方、平衡状態では定義により $\mathbf{v} = 0$ となります。したがって、一般的には、

$$(\text{Var } \mathbf{X}_t)(\text{Var } \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)) \geq 0.$$

最後の観察を実証するために、次のケースを考えてみましょう。

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = -\partial_x U(\mathbf{x}) \quad \& \quad \mathbb{D} = D\mathbb{I}.$$

すると、平衡平均 (U が正定値で制限されていると仮定)

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{2U(\mathbf{x})}{D}},$$

となることによって

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \cdot \partial_x U(\mathbf{x}) \\ &= \frac{D}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} \mathbf{x} \cdot \partial_x p(\mathbf{x}) = -\frac{D}{2} d. \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{D}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} \partial_x p(\mathbf{x}) = 0.$$

したがって、(B.9) の右辺は消えます。

B.3 確率力学への影響

フルートの論文はフェニユス [25] で議論されています。この論文はネルソンの「確率力学」プログラム [4] の基礎を築きました。

[25] の序文で、フェニユスは次のように述べています。

フルートは拡散理論においてハイゼンベルグの関係と形式的には類似した関係が存在

することを証明したが、フォッカー・プランクの方程式は量子力学では有効ではないため、2つの関係は同じ意味を持つことはできないと彼の意見では述べている。

論文の要約にまとめられている [25] のフェニユスの調査結果は次のとおりです。

マルコフ過程にも一定の不確定性関係がある。マルコフ過程には一定の確率振幅関数を割り当てることもできる。量子力学ではフォッカー・プランク方程式も有効である。ハイゼンベルグ関係は、マルコフ過程の不確定性関係の特殊なケースである。波動力学的波動関数は、マルコフ過程によって支配される確率振幅関数の特殊なケースである。波動力学的過程は特殊なマルコフ過程である。ハイゼンベルグ関係式は (以前の解釈とは対照的に) 統計的アプローチの結果のみであり、2つの測定で発生する外乱とは無関係である。

最後に、フルトとフェニユスは確率量子化のコミュニティでは知られており、パリシー-ウー (Parisi-Wu) 法の先駆者としてある程度考えられています (例えば、[6] の序論の議論を参照)。

C 熱力学的不確定性関係との比較

過去数年間、経験的電流 J の分散の下限をその二乗平均と純平均エントロピー生成 S^{tot} の観点から確立する普遍的な不等式

$$\text{Var } \mathcal{J} \geq \frac{2(\text{E } \mathcal{J})^2}{e^{\frac{S^{\text{tot}}}{k_B}} - 1} \quad (\text{C.1})$$

がかなりの注目を集めています (例えば、[3,32] とその中の引用文献を参照)。上記の形式では、不等式は「一般化された熱力学的不確定性関係」と呼ばれ、不等式の「特殊化された」バージョンと区別されます。後者は、右辺の分母を純平均エントロピー生成の累乗で展開した主要項のみを保持することで正式に得られます。

(C.1) の導出は、エントロピー生成と電流の結合確率分布が詳細な変動関係を満たすことを推測しています。したがって、導出は、特定の離散状態マルコフ過程に対して妥当性を確認できる統計的考慮に基づいています。注目すべきことに、不等式の特殊バージョンは、平衡に近い過程に対して第一原理でありながら摂動的な導出を許容します [32]。したがって、これらの結果をフルトの不確定性関係の統計物理学的意味と比較することは有益です。

まず第一に、フルトの不確定性関係は、確率微分方程式を用いて古典的な開放系をモデル化することで生じます。第一原理導出の観点からは、確率微分方程式の使用は、弱い環境システム結合領域に適用されるスケーリング限界によって正当化されます [33]。したがって、少なくとも最先端の一般的な数学的に厳密な考察に関する限り、有効領域は熱力学的不確定性関係の有効領域と本質的に重なります。

第二に、フルトの不確定性関係には、確率過程の分散とその現在の速度の分散が関係します。特に、現在の速度は平均ゼロの量であり、平衡時に同じように消滅します。したがって、熱力学的不確定性関係 (C.1) は、現在の速度の変動に関する重要な情報を伝えません。フルトの不確定性関係は、量子不確定性関係の密接な類似物であり、量子版として、最終的には、プロセスとその速度の積の期待値に適用された コーシー-シュワルツ (Cauchy-Schwartz) 不等式から派生します。一方、熱力学的不確定性関係は、プロセス自体に適用されたクラメール-ラオ (Cramér-Rao) 等式から派生し、エントロピー生成をその平均と分散に結び付けます [34]。

しかし、拡散過程のエントロピー指標に注目すると、2種類の不確定性関係の間には関係が存在します。流速 $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ の変動とエントロピー生成の関係は、 $\mathbb{D} = D\mathbb{I}$ のとき、次のことを観察することによって得られる (例えば、[3、式 (3.94)] を参照)：

$$S^{\text{tot}}(t_i, t_f) = \text{E} \int_{t_i}^{t_f} dt \|\mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t)\|^2,$$

は、区間 $t \in [t_i, t_f]$ におけるランジュバン・スモルホフスキー過程 $\mathbf{X}_t$ によって生成される平均エント

ロピーに比例します。エントロピー指標の場合、マルチンゲール分散と、フルトの不確定性関係の下限值をもたらす量の表現は、直接的に結びついています。コーシー・シュワルツ不等式の単純な適用により、不確定性関係は、例えば、非平衡遷移中にエントロピー生成の確率分布を運ぶ流速変動の分散の下限值に変換されます。さらに、下限値は遷移中に発生する平均エントロピー生成によって表現することができます。このように、これをフルトの不確定性関係に当てはめると、熱力学的な不確定性関係が結びつきます。結論としては、確率過程理論の現代言語でフルトの不確定性関係を定式化することで、実験的にアクセスするのが難しい非平衡指標を、少なくとも下から推定する手段が得られるということです。

参考文献

- [1] Andre C. Barato and Udo Seifert. Thermodynamic uncertainty relation for biomolecular processes. *Phys. Rev. Lett.*, **114**(15):158101, 5, 2015.
- [2] Todd R. Gingrich, Grant M. Rotskoff, and Jordan M. Horowitz. Inferring dissipation from current fluctuations. *J. Phys. A*, **50**(18):184004, 23, 2017.
- [3] Luca Peliti and Simone Pigolotti. *Stochastic Thermodynamics*. Princeton University Press, 2021.
- [4] Edward Nelson. *Quantum fluctuations*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [5] G. Parisi and Yong-Shi Wu. Perturbation theory without gauge fixing. *Sci. Sinica*, **24**(4):483–496, 1981.
- [6] Mikio Namiki. *Stochastic quantization*, volume 9 of Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs. Springer-Verlag, Berlin, 1992. With the collaboration of Ichiro Ohba, Keisuke Okano, Yoshiya Yamanaka, Ashok K. Kapoor, Hiromichi Nakazato and Satoshi Tanaka.
- [7] Anonymous. Obituary: Reinhold Henry Fürth. *Year Book of the Royal Society of Edinburgh*, pages 55–56, 1980.
- [8] Reinhold Fürth. Personal reminiscences. In Maurice Goldsmith, Alan Mackay, and James Woudhuysen, editors, *Einstein: the first hundred years*. Pergamon Press, 1980.
- [9] Reinhold Fürth. *Schwankungserscheinungen in der Physik*. Vieweg-Teubner Verlag, 1920.
- [10] Albert Einstein. *Untersuchungen über die Theorie der Brownsche Bewegung mit Anmerkungen von Reinhold Fürth*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1922.
- [11] Albert Einstein. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, Inc., New York, 1956. Edited with notes by R. Fürth, Translated by A. D. Cowper.
- [12] Reinhold Fürth. Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren. *Physikalische Zeitschrift*, 1922.
- [13] Chen-Pang Yeang. The sound and shapes of noise: Measuring disturbances in early twentieth-century telephone and radio engineering. *Icon*, **18**:63–85, 2012.
- [14] Reinhold Fürth. Einige Bemerkungen zum Problem der Neutronen und positiven Elektronen. *Zeitschrift für Physik*, **85**(5-6):294–299, may 1933.
- [15] Paul Adrien Maurice Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceed-*

- ings of the Royal Society of London, Series A, **133**(821):60–72, sep 1931.
- [16] Helge Kragh. *Dirac: A Scientific Biography*. Cambridge University Press, March 1990.
 - [17] Max Born. *My Life and my views*. 1969, Charles Scribner’ s Sons, New York.
 - [18] W. E. J. Farvis. Obituary: Robert William Pringle. Year Book of the Royal Society of Edinburgh, pages 139–141, 1998.
 - [19] Max Born, Reinhold Fürth, and Robert William Pringle. A Photo-Electric Fourier Transformer. *Nature*, **156**:756 – 757, 1945.
 - [20] Reinhold Fürth. Physics of Social Equilibrium–British Association for the Advancement of Science (BAAS) lecture abstract. *Nature*, **168**:1048–1049, August 1951.
 - [21] Reinhold Fürth. Physics of Social Equilibrium. The Advancement of Science, VIII: 429–432, 1952.
 - [22] Vera Daniel. Physical Principles in Human Cooperation. *The Sociological Review*, a44(1): 107–134, jan 1952.
 - [23] Michel Bauer and Denis Bernard. 2D growth processes: SLE and Loewner chains. *Phys. Rep.*, 432(3-4): 115–221, 2006.
 - [24] Antti Kemppainen. *Schramm-Loewner evolution*, volume 24 of SpringerBriefs in Mathematical Physics. Springer, Cham, 2017.
 - [25] Imre Fényes. Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik. *Z. Physik*, **132**:81–106, 1952.
 - [26] Edward Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 2nd edition, 2001.
 - [27] Fima C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press, 2 edition, 2005.
 - [28] Paolo Muratore-Ginanneschi and Luca Peliti. Classical uncertainty relations and entropy production in non-equilibrium statistical mechanics. arXiv:2302.08290.
 - [29] L de la Peña-Auerbach and Ana Maria Cetto. Stronger form for the position-momentum uncertainty relation. *Physics Letters A*, **39**(1):65–66, apr 1972.
 - [30] Diego de Falco, Salvatore De Martino, and Silvio De Siena. Position-Momentum Uncertainty Relations in Stochastic Mechanics. *Physical Review Letters*, **49**(3):181–183, jul 1982.
 - [31] Edward Nelson. *Quantum fluctuations*. Princeton series in Physics. Princeton University Press, 1985.
 - [32] Soham Pal, Sushant Saryal, Dvira Segal, T. S. Mahesh, and Bijay Kumar Agarwalla. Experimental study of the thermodynamic uncertainty relation. *Physical Review Research*, **2**(2), may 2020.
 - [33] Robert Zwanzig. *Nonequilibrium statistical mechanics*. Oxford University Press, 2001.
 - [34] Andreas Dechant and Shin ichi Sasa. Entropic bounds on currents in Langevin systems. *Physical Review E*, **97**(6):062101, June 2018.