

1998年6月16日

## <<第9週 高校数学のまとめ3：級数展開，無限級数の和と無限乗積>>

### <記法上の注意>

以下の文中で， $a^2$ は $a$ の2乗を意味する． $b_n$ や $b_{n+1}$ はサブスクリプト(下付文字)が $n$ や $n+1$ であることを意味する．

### <目次>

級数展開と無限級数展開  
無限級数の和  
正項級数  
交項級数  
べき級数  
無限級数の収束と収束半径  
コーシーの収束判定法  
ダランベールの収束判定法  
絶対収束級数  
一様収束級数  
無限2重級数  
無限乗積

### <級数展開と無限級数展開>

前に学んだ，関数のテーラー展開のような式のことを級数展開(series expansion)と呼ぶ．これは，ある無限数列(infiniteseries)：

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

が与えられたとき，この数列の初めの $n$ 項の和 $s_n$  [これを部分和(partial sum)と呼ぶ]：

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (2)$$

を考えると，この $s_n$ もまた1つの無限数列：

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (3)$$

を形成する．この数列の $n$ を無限に大きくしてできる数列を無限級数展開(infinite series expansion)と呼び，一般に以下のように書く：

$$\begin{aligned} s &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

### <無限級数の和>

このような無限級数展開を無限級数の和(sum)と呼び，次のような記号 ( $\sigma$ , シグマ)を使って

書く：

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots =$$

$$u_n \cdot (5) \\ n = 1$$

無限級数には次のような性質がある：

$$(A) \ a s = au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots \quad (6)$$

(B) 2つの無限級数，

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots , \\ t = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

があるとき，これらの和と差(subtraction)は，項別に行う：

$$s \pm t = (u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots) \pm (v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots) \\ = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots \quad (7)$$

(C) 無限級数

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

は， $s = \text{finite}$  (有限)のとき収束する(converge)という． $s = \infty$  のとき発散する(diverge)という．このとき，この無限級数から有限個の項を取り除いても，加えても収束する，発散するという性質は変わらない．

<正項級数>

さて，無限級数にはいくつかの典型的な例がある．まず，無限級数のすべての項が正あるいはゼロであるとき，この無限級数を正項級数と呼ぶ．すなわち，

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad u_n \geq 0. \quad (8)$$

例えば，

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n + \dots \quad (9)$$

<交項級数>

一方，無限級数の各項が奇数番目，偶数番目で符号が異なる無限級数を交項級数(alternative series)と呼ぶ．すなわち，

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots \quad (10)$$

例えば，

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots \quad (11)$$

## &lt;べき級数&gt;

上の例では，無限級数の各項は，数であったが，各項が独立変数を含む場合もある．この典型的な例が前に学んだテイラー展開である．このような無限級数のことを，べき級数(power series)と呼ぶ．例えば，

$$1 + x/1 + x^2/2! + x^3/3! + \dots \quad (12)$$

## &lt;無限級数の収束と収束半径&gt;

ではこれらの無限級数の和はどのような場合に収束するのだろうか？つまり，無限級数の和が有限の値を持つのだろうか？

(4)の無限級数があるとき，それが有限の値を持つとき，その無限級数は収束するという．すなわち，

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (13)$$

ではどのように収束，発散を判定したらよいのだろうか？

まず正項級数の場合を考えよう．この無限級数の場合，すべての項はゼロ以上であるから，和はゼロ以上である．したがって，この無限級数は収束するか，発散するかのいずれかである．

(A) 収束する場合，部分和 $s_n$ が $n$ 依存しない正数 $A$ より小さい，すなわち，

$$s_n < A \quad (14)$$

であるなら，そのときに限って収束する．

(B) (13)の正項級数 $u_n$ の $n$ 番目より大きい項が別の正項級数 $v_n$ の $n$ 番目より大きい項より小さいとき：

$$u_n < v_n \quad (15)$$

もし $v_n$ が収束するなら，もとの正項級数 $u_n$ も収束する．逆に，正項級数 $u_n$ の $n$ 番目より大きい項が別の正項級数 $v_n$ の $n$ 番目より大きい項より大きいとき：

$$u_n > v_n \quad (16)$$

もし $v_n$ が発散するなら，もとの正項級数 $u_n$ も発散する．

さて，次のような等比級数の和を考えて見よう：

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (17)$$

この級数は $q$ のどの値に対して収束し，発散するだろうか？ $q$ を次のように場合わけして考えよう：

$$|q| < 1, |q| > 1, q = 1, q = -1. \quad (18)$$

(A) (17)の部分 and は次のように書ける：

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} \\ &= a(1 - q^n)/(1 - q). \end{aligned} \quad (19)$$

したがって， $|q| < 1$ のとき，この無限級数は収束する．

(B) 一方， $|q| > 1$ のとき， $|q|^n$  となるから発散する．

(C)  $q = 1$ のとき， $s_n = n a$  となり発散する．

(D)  $q = -1$ のとき，

$$s = a - a + a - a + a - \dots \quad (20)$$

となり，部分和は $n$ が偶数(even)のとき $s_n = 0$ ， $n$ が奇数(odd)のとき， $s_n = a$ ．したがって，この級数和は収束しない．つまり，発散する．しかし，無限に大きく発散せずに有限の値の間を振動する(oscillate)．

このように，無限級数は $q$ の値によって収束したり発散したりする．この $q$ の境となる値を収束半径(convergence radius)呼ぶ．上の例では，収束半径は1である．すなわち， $|q| < 1$ ．

#### <コーシーの収束判定法>

さて，良く知られた収束条件判定法には，コーシー(Cauchy, 1789-1857)によるものと，ダランベール(de'Ambert, 1717-1783)によるものがある．

コーシーの収束判定法は，以下のようなものである．数列：

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

があるとき，十分大きな $n$ に対して，

$$(u_n)^{1/n} < q < 1 \quad (21)$$

を満たすならば，(1)は収束する．逆に，

$$(u_n)^{1/n} \geq 1 \quad (22)$$

を満たすならば，(1)は発散する．

#### <ダランベールの収束判定法>

次にダランベールの収束判定法は，以下のようなものである．数列(1)があるとき，十分大きな $n$ に対して，

$$u_n/u_{n-1} < q < 1 \quad (23)$$

を満たすならば，(1)は収束する．逆に，

$$u_n/u_{n-1} \geq 1 \quad (24)$$

を満たすならば，(1)は発散する．

これらの他に，クンマーの判定法，ガウスの判定法，アーベルの判定法などさまざまなものがある．どれを使うかは，それぞれの無限級数の性質を考えて選択する．

#### <絶対収束級数>

数列(1)があるとき，それに対して

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (25)$$

の数列を考える．これが収束するなら，元の数列(1)は絶対収束する(absolutely converge)という．

#### <一様収束級数>

数列(1)があるとき，その部分和の数列(3)が次の条件を満たすとき，その無限級数は一様収束する(uniformly converge)という． $s$ を無限級数の和として，十分大きな $N$ に対して， $n > N$ である $n$ に対

し、

$$|s - s_n| < \quad (26)$$

が成り立つ。このとき、(26)は次のように言い替えることができる:  $m, n > N$ なるすべての $m, n$ に対して、

$$|s_m - s_n| < \quad (27)$$

絶対収束、一様収束の両方とも、単なる数の無限級数だけでなく、関数でできる無限級数(これを関数列と呼ぶ)の場合にも成り立つ。そのとき、それぞれ、絶対収束関数列、一様収束関数列と呼ぶ。

#### <無限 2 重級数>

さらに高度な例として、以下のような数列がある：

$$u_{\{11\}} u_{\{12\}} u_{\{13\}} \dots$$

$$u_{\{21\}} u_{\{22\}} u_{\{23\}} \dots$$

$$u_{\{31\}} u_{\{32\}} u_{\{33\}} \dots$$

$$\dots (27)$$

...

...

このような数列を 2 重級数と呼ぶ。そして、この 2 重級数の和は次のように書ける：

$$S = u_{\{11\}} + (u_{\{12\}} + u_{\{21\}}) + (u_{\{13\}} + u_{\{22\}} + u_{\{31\}}) +$$

$$+ (u_{\{1n\}} + u_{\{2n-1\}} + \dots + u_{\{n1\}}) + \dots =$$

$$u_{\{ij\}} \cdot (28)$$

$$i = 1 \quad j = 1$$

この 2 重級数に対しても、絶対収束、一様収束、収束条件など同様なことを考えることができる。

#### <無限乗積>

さて今度は、次のようなものを考えてみよう:

$$(1 + a_i)$$

$$i = 1$$

$$= (1 + a_1) (1 + a_2) \dots (1 + a_n) \dots \quad (29)$$

これを無限乗積(infinite product)と呼ぶ。

#### <Home Work Set #9>

1) 無限級数,  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ の和を求めよ。(5点)

2) 無限級数,  $1 + 1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots$ の和を求めよ。(5点)

3) 無限級数,  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ の和を求めよ。(5点)

4) 無限級数,  $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots$  の収束半径を求めよ。(5点)

5) 無限乗積(29)が収束するかどうかどのように判定したらよいだろうか?(10点)

<Home Work Set #8の解答>

1) a)  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  として,  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  をそれぞれ  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  で表現せよ。(5点)

答え)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) / r + \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \right) / r,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) / r + \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) / r,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x).$$

これより,

$$\frac{\partial}{\partial r} x = x / \sqrt{x^2 + y^2} = x/r = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} y = y / \sqrt{x^2 + y^2} = y/r = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} x = (-y/x^2) / [1 + (y/x)^2] = -y / (x^2 + y^2)$$

$$= -r \sin \theta / r^2 = -\sin \theta / r,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} y = (1/x) / [1 + (y/x)^2] = x / (x^2 + y^2)$$

$$= r \cos \theta / r^2 = \cos \theta / r.$$

これらを代入して,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) / r + \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \right) / r$$

$$= \cos \theta / r + (-\sin \theta / r) / r,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) / r + \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) / r$$

$$= \sin \theta / r + (\cos \theta / r) / r.$$

b) a)の結果を使って,

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u(x, y) = 0$  を  $u(r, \theta)$  に対する微分方程式に変換せよ。(5点)

答え)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$$

$$= [\cos \theta / r + (-\sin \theta / r) / r]^2$$

$$+ [\sin \theta / r + (\cos \theta / r) / r]^2$$

$$= (\cos \theta / r)^2 + (1/r)^2 / r + (1/r^2)(\sin \theta)^2.$$

したがって,

$$[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1/r) \frac{\partial}{\partial r} + (1/r^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}] u(r, \theta) = 0.$$

これが2次元のラプラス方程式の極座標表示である。これは、次のようにして示すことができる:

$$[\cos \theta / r + (-\sin \theta / r) / r]^2 u$$

$$= [\cos \theta / r + (-\sin \theta / r) / r]$$

$$\times [\cos \theta u / r + (-\sin \theta / r) u / r]$$

$$= \cos^2 \theta u / r^2$$

$$- (\sin \theta / r)(\cos \theta / r) u / r$$

$$- \cos \theta \sin \theta (1/r) / r u / r$$

$$- 2 \cos \theta \sin \theta / r^2 u / r$$

$$+ (\sin \theta / r^2)(\sin \theta / r) u / r$$

$$+ (\sin^2 \theta / r^2) u / r^2$$

$$= \cos^2 \theta u / r^2 + (\sin^2 \theta / r) u / r$$

$$+ (\cos \theta \sin \theta / r^2) u / r$$

$$\begin{aligned}
& -2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\cos^2\theta / r^2) u / r \\
& + (\sin^2\theta / r^2) u / r^2 \\
& = \cos^2\theta u / r^2 + (\sin^2\theta / r) u / r \\
& + 2(\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& - 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\sin^2\theta / r^2) u / r^2. \tag{A}
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
& [\sin\theta / r + (\cos\theta / r) / r]^2 u \\
& = [\sin\theta / r + (\cos\theta / r) / r] \\
& \times [\sin\theta u / r + (\cos\theta / r) u / r] \\
& = \sin^2\theta u / r^2 \\
& + (\cos\theta / r)(\sin\theta / r) u / r \\
& + \cos\theta \sin\theta (1/r) / r u / r \\
& + 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\cos\theta / r^2)(\cos\theta / r) u / r \\
& + (\cos^2\theta / r^2) u / r^2 \\
& = \sin^2\theta u / r^2 + (\cos^2\theta / r) u / r \\
& - (\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& + 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& - (\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& + (\cos^2\theta / r^2) u / r^2 \\
& = \sin^2\theta u / r^2 + (\cos^2\theta / r) u / r \\
& - 2(\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& + 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\cos^2\theta / r^2) u / r^2. \tag{B}
\end{aligned}$$

これら(A), (B)を足して,

$$\begin{aligned}
& [\cos\theta / r + (-\sin\theta / r) / r]^2 u \\
& + [\sin\theta / r + (\cos\theta / r) / r]^2 u \\
& = \cos^2\theta u / r^2 + (\sin^2\theta / r) u / r \\
& + 2(\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& - 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\sin^2\theta / r^2) u / r^2 \\
& + \sin^2\theta u / r^2 + (\cos^2\theta / r) u / r \\
& - 2(\cos\theta \sin\theta / r^2) u / r \\
& + 2\cos\theta \sin\theta / r^2 u / r \\
& + (\cos^2\theta / r^2) u / r^2 \\
& = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) [u / r^2 + (1/r) u / r] \\
& + (1/r^2) u / r^2 \\
& = u / r^2 + (1/r) u / r + (1/r^2) u / r^2. \\
& [u^2 / r^2 + (1/r) / r \\
& + (1/r^2) u^2 / r^2] u = 0.
\end{aligned}$$

これがラプラス方程式の極座標表示である.

2) a)  $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)$ を $(x, y) = (0, 0)$ の回りで2次までテイラー展開せよ. (5点)

答え)

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= (1 + x^2 + y^2), \\
f_{\{x\}}(x, y) &= x / (1 + x^2 + y^2), \\
f_{\{y\}}(x, y) &= y / (1 + x^2 + y^2),
\end{aligned}$$

$$f_{xx}(x, y) = 1 / (1 + x^2 + y^2) - x^2 / (1 + x^2 + y^2)^{3/2},$$

$$f_{yy}(x, y) = 1 / (1 + x^2 + y^2) - y^2 / (1 + x^2 + y^2)^{3/2},$$

$$f_{xy}(x, y) = -x y / (1 + x^2 + y^2)^{3/2}.$$

これらに  $x = y = 0$  を代入すると,

$$f(0, 0) = 1,$$

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,$$

$$f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 1,$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0.$$

したがって, テイラー展開は,

$$f(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)/2 + \dots$$

b) そのときのヘシアンを求めよ。(5点)

答え)

$$\text{ヘシアン} = f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2$$

$$= 1.$$

3)  $f(z) = z^2$  のとき,  $z = x + i y$  を代入して,  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  の形に直せ。(5点)

答え)

$$f(z) = z^2 = (x + i y)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy.$$

4) a) 次のベクトルを  $t$  に関して微分せよ:

$$x(t) = (u t, v t - g t^2/2). \text{ ここで, } u, v, g \text{ は定数. (5点)}$$

答え)

$$dx(t) / dt = (u, v - g t).$$

5)  $a = (0, 0, B x)$ ,  $B$  は定数とする。このとき,  $\nabla \cdot a$  と  $\nabla \times a$  を求めよ。(5点)

答え)

$$\nabla \cdot a = a_1 / x + a_2 / y + a_3 / z$$

$$= (0 / x + 0 / y + B x / z)(B x) = 0.$$

$$\nabla \times a =$$

$$e_1 e_2 e_3$$

$$\begin{vmatrix} / x & / y & / z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 a_3 & -3 a_2 \\ -3 a_1 & -1 a_3 \\ -1 a_2 & -2 a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2(B x) & -1(B x) \\ -1(B x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, -B, 0).$$

6)  $y(x) = \exp[-x^2]$  の満たす微分方程式を見つけよ。(5点)

答え)

$$dy/dx = -2x \exp[-x^2] = -2xy.$$

7)  $d^2 y / dt^2 = -x^2 y$  の解で, 初期条件:

$$y(0) = 0, dy(0)/dt = 1 \text{ を満たす解を求めよ. (5点)}$$

答え)

$y(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$ と仮定する．これは明らかに元の微分方程式の解である．初期条件より， $y(0) = A = 0$ ．また， $dy(t)/dt = -A \sin(t) + B \cos(t)$ だから， $dy(0)/dt = B = 1$ ．したがって，求める解は， $y(t) = \sin(t)$ ．

[前セクション](#) [次セクション](#) [目次](#)

---

[ホームページ](#) [和基](#) [和子](#) [維作](#) [条蒔](#) [家族](#) [Donation](#)

---

「井口和基博士と家族のホームページ」  
〒774-0003 徳島県阿南市畷町新はり70-3  
井口和基 (C)2004