1998年4月14日

<<第１週　高校数学のまとめ１：数列，因数分解，連分数展開>>

<記法上の注意>
以下の文中で，a^2はaの２乗を意味する．b_nやb_{n+1}はサブスクリプト(下付文字)がnやn+1であることを意味する．

<目次>

<数の多様性>
　まず最初に一般に最もなじみが薄いが，物事を考える基本として最も適していると思われる，数の多様性について説明しよう。

<発散する数列>
　数学の世界にもさまざまな多様性がある。その中でも数の多様性は最も基本的なものである。数の概念は人類の発祥の頃ほど古くからあったと考えられる。特に，1, 2, 3,...という自然数(N)は最も古いだろう。そして，足し(+)，引き(-)，掛け算(×)，割り算(÷)といった四則演算も同じくらい古くから知られていた。
さて，その自然数の並び(1, 2, 3, . . .)は，それ自体一つの発散する数列である。つまり，後になるほど数が大きくなる数列である。ゼロ番目も含めて、n番目の数をa_nと書くと、a_n＝nとなるのが自然数である。こうした数列は，中学や高校で学んでいる等比数列や等差数列の中でも最も簡単なものである。
　では，いつも前2つの数の和を次の数とする数列はどのようなものだろうか？最初の2つを１とすると、

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

という３つごとに偶数が現われる数列が得られる。これはフィボナッチ数列と呼ばれ，それぞれの数はフィボナッチ数と呼ばれる。もしn番目のフィボナッチ(Fibonacci)数をFnと書くと，(n+1)番目の数F_{n+1}は，

F_{n+1}=F_{n-1}+F_{n}

と初期条件

F_0 = F_1=1

で得られる。
　このような数列は無数に考えられる。例えば，前３つの数を足して次の数を与えるとか

$(F_{n+1} = F_{n-2}+F_{n-1}+F_n)$，

前４つの数を足して次の数を与える

$(F_{n+1} = F_{n-3}+F_{n-2}+F_{n-1}+F_n)$

とかさまざまである。
　以上の数列の多様性は，自然数の数列と別の数列との対応のさせ方が無数に存在するということである。例えば，フィボナッチ数列の場合，自然数の数列とフィボナッチ数列との対応は，

$\{0\to1, 1\to1, 2\to2, 3\to3, 4\to5, 5\to8, 6\to13, \ldots\}$

である。これを簡単に，対応$\{F: n \to F_n\}$と書くことができるのである。
高校で習った，等差数列:

$a_{n+1} = b + a_n$

や等比数列：

$a_{n+1} = r\, a_n$

(ここでb, rは定数)は，これらの特別な場合である。

<ユークリッドの互除法>
　ギリシャ時代，ユークリッド(Euclid)は，２つの数が割り切れるどうか調べるための方法(algorithm,アルゴリズム)を発見した。aとbの２つの自然数があるとしよう。仮にaの方がbより大きいとして，aをbで割ると，商がqで余りがrであるとする($0<r<b$)。もし余りrがゼロなら，aはbで割り切れ，aはbの倍数($a=qb$)である。もし余りrがゼロでないなら，aはbで割り切れず，$a=qb+r$である。今度は，bとrをaとbと見なして，同じことをする。その商をq'，余りをr'とすると，$b=q'r+r'$，そして余りがゼロになるまで繰り返し同じことができる。そして，もしある繰り返しの後その余りがゼロになると，結局もとのaとbの比(a/b)は一つの分数で書けることになる。この方法をユークリッドの互除法という。この場合，次々と現われる商の数列と最後の余りを並べて，次のように書くことができる：

$a/b = [q, q', q'', \ldots, q(n)+r(n)/r(n-1)]$。

そしてそれは、次のように書くこともできる：

$a/b = q+1/(q'+1/(q''+1/(\ldots +1/(q(n)+r(n)/r(n-1)) \ldots))$。

これをa/bの連分数展開という。

<無理数の登場>
　一方，もし際限なくそのプロセスが繰り返されるときはどうなるのだろうか？この場合，次々と現われる商の数列は，

$a/b=[q, q', q'', \ldots, q(n), \ldots]$

と際限なく続くことになる。ユークリッドは，この場合そのa/bは一つの無理数（割り切れない数、irrational number)と考えた。

　例えば，

$x^2 = x+1$

という２次方程式の解を考えてみよう。両辺をxで割ると，

$x = 1+1/x$

となる。右辺の分母のxに右辺全体を入れると，

$x = 1+1/(1+1/x)$

が得られる。どんどん同じことを繰り返すと，

$x = 1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1+ . . .))) . . .)$

と際限なく続く。これはユークリッドの互除法の特別な場合で，

$x = [1, 1, 1, 1, 1, . . .]$

となる例である。2次方程式を直に解くと，その無理数は

$x=(1+\sqrt{5})/2$

となる。これは黄金率であり，最も簡単な連分数展開の場合である。そして，例のフィボナッチ数の比(F_n/F_{n-1})は，nが大きくなるにしたがって黄金率に近づき，$n\to\infty$で一致することが分かる。こうして，無理数は発散する数列の比としていつも表わすことができるのである。
　同様のことは，あらゆる数列に対して，あらゆる２つの数に対して考えることができる。このように，無理数もさまざまな多様性を持っていることが分かる。そして，実数は分数のような有理数とそれ以外の無理数からなり，無理数も連分数展開の数列が決定論的に予想できる代数的性質をもつ代数的数（例えば，$\sqrt{2}$，$5^{1/3}$など)とそれが決定論的に予想できない超越数(例えば，pi,eなど)に分類される。このように数の多様性もそれ自身で閉じた宇宙を作っている。まさに，ライプニッツ(Leibnitz)のいうモナドのような，一つの小宇宙(マイクロコズム，microcosm)である。
　我々が，人生で物事は理屈では割り切れないとか，不合理であるとかいう，言い方はここから来ているのである。一般に，数学や科学は筋の通った学問であるから元来理屈で割り切れるものであり，人生の物事はそんな単純なものではないと考えがちである。しかし，実はそうではなく，数と言えども，割り切れるものとそうでないものとがあるのである。数のほとんどは割り切れない超越数であり，その中に少し質のいい割り切れない代数的数があり，その中に最も質のいい割り切れる数がほんのわずかだけ含まれているのである。理屈がはっきり定義され，良く定まっているからこそ，何が割り切れ，何が割り切れないか明確になるのである。むしろ，人生の物事が，混沌として見える理由は，むしろ理屈で割り切れないのではなく，理屈をはっきり定義しないで物事を考えることから来るのである。数学の有名なゲーデル(K. Goedel)の定理は，まさしくこのわれわれが感じる割り切れなさに関連するテーマなのである。

<連分数展開>
　一般に，aとbの数の比をlambdaとしよう。これを

$\mathrm{lambda} = n_0+1/(n_1+1/(n_2+1/(. . .)))$
$= [n_0, n_1, n_2, n_3, . . .]$

のように連分数展開する。このとき，数の並び

$\{n_0, n_1, n_2, n_3, . . . \}$

のことを無理数lのしっぽ(Tail)という。そして，無理数lの近似λ_kの連分数展開を

$[n_0, n_1, n_2, n_3, . . . , n_k]$

とすると，これは次のように書くことができる：

$\lambda_k = P_k/Q_k$,
$P_{k+1} = n_{k-1} P_k + P_{k-1}$: $Q_{k+1} = n_{k-1} Q_k + Q_{k-1}$,

ここで初期条件は，

$P_0 = 0, Q_0 = 1, P_1 = 1, Q_1 = 0$

である。
　上述の黄金率の場合は，$[n_0, n_1, n_2, n_3, . . .]$が[1, 1, 1, 1, . .1]であり，$P_k$と$Q_k$がそれぞれフィボナッチ数$F_n$と$F_{n-1}$になる特別な場合である。

<因数分解>
　一方，aとbが割り切れる場合はどうなるだろうか？この場合，

$a = qb$ $(r = 0)$

である。したがって，aはbの倍数である。もしbが素数p(prime number,その数と1以外に割り切れない数)の場合はどうなるだろうか？今度は，qに対して同じように割り切れるどうかしらべる。以下同様にして，結局，自然数aは，

$a = 2^{m_2}3^{m_3}\dots p^{m_p}$

のように自然数の積の形に書けることになる。これを因数分解あるいは素因数分解という。そして，このように書ける自然数を可約(reducible)な自然数という。一方，このように書けない自然数を既約(irreducible)な自然数という。すべての素数は，その定義から，既約な自然数である。
　２つの数aとbがあり，その共通の最大公約数mがあるとする。このとき，
$a = qb + r = mx$,
$b = q_1r + m = my$

のように書ける。したがって，

$m = b - q_1r = b - q1(a - qb) = - q_1a + (1 + qq_1)b$。

このように，任意の２つの数は必ず，

$m = Aa + Bb$

となるような，数の組A, Bが存在する。そして，aとbが互いに素(割り切れない)なら，

$m = 1$

となるA, Bが必ず存在する。

<多項式への拡張>
　以上の内容はすべて，aとbが任意の多項式の場合にも成り立つ。例えば，

$a = x^2 + 2x +1$,
$b = x + 1$

の場合，

$a/b = x + 1$

となる。つまり，aは次のように因数分解できる：

$a = (x + 1)^2$。

　このように，多項式(polynomial)どうしの掛け算や割り算のことを，整式(係数が整数の多項式)の掛け算や割り算という。そして，割り算できない多項式のことを既約な多項式，割り算できる多項式のことを可約な多項式と呼ぶ。

<例題>
1) 次の数列の一般項a_nを求めよ。
2, 3, 5, 9, 17, … , a_n, …

答え）
上の数列の隣り合う項の差をとると，
1, 2, 4, 8, … , $a_{n+1} - a_n$, …
したがって，$a_{n+1} - a_n = 2n$。これから，$a_1 - a_0 = 1$。そして，$a_1 = a_0 + 1= 3$; $a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 2^2 + 1$; $a_3 = a_2 + 22 = 2^2 + 1 + 2^2 = 2\times 2^2 + 1 = 2^3 + 1$ 。 それゆえ，$a_n = 2n + 1$。

2) 7を3で割るときの商と余りはいくつか？

答え）
$7/3 = 2 + 1/3 = 2$ … 1。
$7 = 2\times 3 + 1$。

3）$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x -1$を$x^2 - 5x - 2$で割ったときの，商と余りは何か？（大学センター試験，１９９８年）

答え）
x^2 -3 x + 1
----
x^2 - 5x - 2) x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x -1
x^4 - 5x^3 - 2x^2

-3x^3 + 16x^2 + 8x -1
-3x^3 + 15x^2 + 6x
----
x^2 + 2x + 1

$x^2 - 5x - 2$
\-
$7x + 3$

それゆえ，
$(x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 1)/(x^2 - 5x - 2)$
$= x^2 - 3x + 1$ …… $7x + 3$。
すなわち，
$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 1 =$
$(x^2 - 5x - 2)(x^2 - 3x + 1) + (7x + 3)$。
つまり，商は$x^2 - 3x + 1$，余りは$7x + 3$。

4）２次式$ax^2 + bx + c$を因数分解せよ。

答え)
$ax^2 + bx + c = a\{x^2 + (b/a)x + c/a\} =$
$a\{x^2 + (b/a)x + (b/2a)^2 + c/a - (b/2a)^2\}$
$= a\{(x + b/2a)^2 - ((b/2a)^2 - c/a)\}$
$= a\{x + b/2a - \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}\}$
$\times\{x + b/2a + \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}\}$。

5）フィボナッチ数列：
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . . の一般項F_nを求めよ。

答え)
　一般に，$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ (1)と初期条件$F_0 = 1, F_1 = 1$(2)が成り立つ。$F_n = r^n$と書こう。これを(1)に代入すると， $r^2 = r + 1$が得られる。これを解くと，$r_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$。したがって，独立な２つの解$(r_{\pm})^n$ が得られる。これらをもとに，一般解は２つの定数a, bとして，$F_n = a (r_{+})^n + b (r_{-})^n$ (3)と書ける。これに初期条件をあてはめると，$F_0 = a + b = 1$ (4) ; $F_1 = a r_{+} + b r_{-} = 1$(5)。(4)と(5)をaとbに対して解くと，$a = (1 - r_{-})/(r_{+} - r_{-}) = (1 - r_{-})/\sqrt{5} = r_{+}/\sqrt{5}$, $b = (r_{+} - 1)/(r_{+} - r_{-}) = r_{-}/\sqrt{5}$ 。ここで，$r_{+} + r_{-} = 1$を使った。結局，$F_n = (r_{+}/\sqrt{5})(r_{+})^n + (-r_{-}/\sqrt{5})(r_{-})^n = [(r_{+})^{n+1} - (r_{-})^{n+1}]/(r_{+} - r_{-}) = [(r_{+})^{n+1} - (r_{-})^{n+1}]/\sqrt{5}$ (6)となる。

<Home Work Set#1>
1) 次の数列の一般項a_nを求めよ。
1, 2, 6, 24, 120, … , a_n, …

2) 次の和を与える公式を求めよ。
$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$。

3) 55/29の連分数展開を求めよ。

4) 次の連分数展開はどのような２次方程式の解か？
$2 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + \dots)))$。

5） $9x^3 + 10x^2 + 7x + 1$を$x^2 + 2x - 3$で割ったときの，商と余りは何か？

6) 次の式x^2 - 3xy + 5y^2を因数分解せよ。

7) (a) 次の数列：2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, . . . の一般項A_nを求めよ。
(b) n -> ∞のときの比A_n/A_{n-1}を求めよ。

次セクション 目次

ホームページ 和基 和子 維作 条蒔 家族 Donation

「井口和基博士と家族のホームページ」
〒774-0003　徳島県阿南市畭町新はり70-3