

量子力学の確率的正当化と解釈

[Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung
und Interpretation der Quantenmechanik,
Zeitschrift für Physik, **132** pp.81 – 106(1952)]

Imre Fényes.

Abstract

量子力学と物理学の他の統計学分野の関係に関するこれまでの調査では、2つの理論には多くの類似点があることが示されていますが、現在の解釈によれば、この類似点は形式的な類推のみに基づいています。この類推は、量子力学の現状を考えると埋められないと思われる、2つの分野間の根本的な違いの発生を排除するものではありません。次に、マルコフ過程を参照し、以前の矛盾自体が消える新しい接続をもたらす定理について説明します。本研究の結果は、次のように簡単にまとめられます。マルコフ過程にも一定の不確実性関係が存在します。特定の確率振幅関数をマルコフ過程に割り当てることもできます。フォッカー方程式は量子力学においてもその有効性を保持します。ハイゼンベルクの関係は、マルコフ過程の不確実性関係の特殊なケースです。波動力学波動関数は、マルコフ過程に関連する確率振幅関数の特殊なケースです。波動力学過程は、特殊なマルコフ過程です。ハイゼンベルクの関係は(以前の解釈とは対照的に)統計的取り扱いの結果のみであり、測定中に発生する外乱とは無関係です。「隠れたパラメータ」の問題も、因果律の原理に従って量子力学で解決できます。最後に、シュレーディンガー方程式の統計的導出は次のようになります。

1

量子力学と古典物理学のさまざまな統計分野の間に存在する形式的な類似性は、すでに何度も指摘されてきました。有望な形式的な類似性にもかかわらず、古典的な統計理論と量子理論の間には埋められない違いがあることにすべての著者が同意しています。パウリ ([1], S. 101) は、座標と運動量の統計的散乱に関連した一致を指摘しましたが、彼の意見では不確実性関係は量子力学においてのみ有効です。フルト [2] は拡散理論においてハイゼンベルクの関係と形式的に類似した関係が存在することを証明しましたが、彼の意見では両方の関係は同じ意味を持たちません。なぜなら (1.c.) フォッカー方程式は量子力学ではいかなる妥当性も持ち得ないからです。

シュレーディンガー方程式の類似性

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-1} V \Psi - \frac{h}{4\pi m} \sqrt{-1} \Delta \Psi.$$

一方、フォッカー方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} w v - D \Delta w.$$

一方、点状のブラウン粒子の運動 ([1], 103 ページ; [2] を参照) はすぐに認識できます。(Ψ は波動関数、V は外力から生じる位置エネルギー、A はラプラス演算子、w はブラウン運動粒子の分布の確率密度、v はマクロな流れの速度、D は媒体の拡散係数です。) 類似性は、外力場が発生しない場合、つまり V = 0 かつ v = 0 の場合に特に顕著です:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{h}{4\pi m} \sqrt{-1} \Delta \Psi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -D \Delta w.$$

しかし同時に、シュレーディンガー [3] が最も明確に指摘した相違点も見つかります。「基本的な力学方程式とフォッカー方程式、および両者に関連する統計的概念の間の特定の関係は、おそらく、2つの思想圏に十分精通している人なら誰でも明らかでしょう。しかし、よく見ると、2つの非常に重大な矛盾が見つかります。1つは、ランダム系の古典的な理論では確率密度自体が線形微分方程式の対象であるのに対し、波動力学ではいわゆる確率振幅が対象であり、そこからすべての確率が双線形に形成されるという点です。2番目の矛盾は次の通りです; どちらの場合も微分方程式は時間に関して1次ですが、因子 $\sqrt{-1}$ の出現により、波動方程式は双曲的、つまり物理的に言えば可逆的な性質を持ち、フォッカー方程式の放物線の不可逆的な性質とは対照的になります。」([3], 148–149 ページ) シュレーディンガーは、波動力学が統計的推論のみに基づいて構築することはできないことを別の方法で証明しようとした [4]。「解釈; 波動力学は単に多数の系の挙動を統計的に記述しているに過ぎないという主張は、問題の統計的記述を特定のギブス集団を指定することで完全に置き換えることができないため、維持することはできません。その理由は、測定可能な物理量に割り当てられた演算子の非可換性にあります。」F. ボップ [5] と J. バス [6] による最近の研究でも同様の解釈が可能となっています。

先ほど述べた議論に加えて、フォン・ノイマンによる「隠れたパラメータ」の存在の不可能性に関する証明も考慮に入れると ([7] §§III. 2., IV. 1., 2.), 量子力学を「古典的な」統計の枠組みに当てはめようとする試みは、例えば「永久機関」を作ろうとする試みと同じくらい無駄で失敗する運命にあると考える傾向があるかもしれません。

二つの理論の根本的な違いを示す論理的流れは、それ自体は間違いなく正しいということを強調しなければなりません。しかし、さらに深く調査してみると、波動力学の統計的道具と古典物理学の統計的道具の間には違いがないことがわかります。私たちはそれを毎回見るでしょう。量子力学が古典物理学の分野と異なる点は、それが統計的取り扱いにのみ起源を持ち、それ以外には本質的に異なる特徴がないことです。上記のような違いは、古典的なタイプの統計問題にも存在

します。先ほど挙げた反論のせいで、提示された矛盾した議論が特定の形式的な類推のみを考慮しており、したがってそれらに関連する矛盾は形式的な矛盾ではないという事実がなければ、もちろんこれらすべては完全に矛盾しており、したがって理解不能なものとなるでしょう。したがって、これらの理由には本質的に証明力がなく(証明力を持つこともできません)、それらに対して与えられた解釈は根拠のない、したがって誤った一般化を表しています。これらについては以下で詳しく説明します。

2

ここで紹介する理論では、確率論のマルコフ過程(以下、M 過程と呼ぶ)の定理が重要な役割を果たします。そこでまず、このような過程を記述するのに適したコルモゴロフの分析装置 [8]、[9] について簡単に説明します。

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を物理系の空間構成を特徴付けるパラメータとします。(特性評価は完全である必要はありません。完全な特性評価に必要なパラメータよりも少ないパラメータが発生する場合があります。) パラメータの時間的変化の因果法則がわからない場合、または因果関係の考慮が複雑すぎる場合は、統計的処理を選択し、因果パラメータ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ の代わりにランダム変数を導入します。この場合、私たちは確率過程を扱っており、次のような特性があると仮定しています:

時刻 s に入力された「初期状態」 $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ から時刻 t の「最終状態」 $\mathbf{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ への遷移の確率は、系の t の以前の事象に依存します(過程には遅延効果はありません)。状態確率または遷移確率の密度関数をそれぞれ

$$w(\mathbf{x}, s), v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t)$$

と定義します。したがって、時刻 s における系が $\mathbf{x}$ 状態の $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ 近傍にある確率は、

$$w(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x}$$

そして、系が時刻 s の状態 $\mathbf{x}$ から時刻 t の状態 $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_n$ —環境に移行する確率は、

$$v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}.$$

密度関数は 1 に正規化されます。

$$\int w(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x} = 1, \int v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = 1. \quad (1)$$

M 過程の場合、次の 2 つの積分方程式が存在します。

$$v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) = \int v(\mathbf{x}, s; \mathbf{z}, \tau) v(\mathbf{z}, \tau; \mathbf{y}, t) d\mathbf{z} \quad (2)$$

$$w(\mathbf{y}, s) = \int v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) w(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

遷移確率の観点からモーメントを定義します。

$$A_i(\mathbf{x}, s, \Delta) = \int (y_i - x_i) v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

$$B_{ik}(\mathbf{x}, s, \Delta) = \int (y_i - x_i)(y_k - x_k)v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t)d\mathbf{y},$$

ここで $\Delta = t - s$ とおきます。最後に、モーメントと Δ の商の極限を形成します。

$$\left. \begin{aligned} a_i(\mathbf{x}, s) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{A_i}{\Delta}, \\ b_{ik}(\mathbf{x}, s) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{B_{ik}}{2\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

もちろん、極限 $a_i(\mathbf{y}, t), b_{ik}(\mathbf{y}, t)$ も同様に定義されます。

以下では、極限 (4) が存在し、それに対応する高次のモーメントの極限は消滅すると仮定します。 $A_i(\mathbf{x}, s, \Delta)$ は $\mathbf{x}_i$ に沿った平均変位なので、 a_i は平均速度を持ちます。 b_{ik} を解釈するのはそれほど簡単ではありません。しかし、それらが統計的な分散を特徴づけていることは明らかです。(拡散係数も同様の特性を持つと仮定します。) a_i がベクトル成分であり、 b_{ik} がテンソル成分であることは簡単にわかります。ここでは簡単に b_{ik} を**散乱テンソル**と呼ぶことにします。上記によれば、(2) から、コルモゴロフ微分方程式は

$$-\frac{\partial v}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i,k} b_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} (a_i v) + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_k} (b_{ik} v). \quad (6)$$

また、(3) と (6) から出発して、フォッカー方程式の次の一般化に到達することもわかっています。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} (a_i w) + \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} (b_{ik} w), \\ &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_i w - \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3

連続体物理学の連続方程式 (7)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} j_i, \quad j_i = c_i w \quad (8)$$

を比較すると、各 M 過程に統計的な粒子流密度を割り当てることができます。

$$j_i = a_i w - \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) \quad (9)$$

一方、流速成分は次のような値を持つ。

$$c_i = \frac{1}{w} j_i = a_i - \frac{1}{w} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) \quad (10)$$

c_i は構成座標 y_i に対応する確率的全速度を表します。この用語の具体的な意味については、拡散の例を参考にしてください。この場合、 $i = k$ の場合には $b_{ik} = D = \text{const}$ 、 $i \neq k$ の場合には $b_{ik} = 0$ となるので、

$$c_i = a_i - \frac{D}{w} \frac{\partial w}{\partial y_k}. \quad (11)$$

最初の項はマクロの流れの速度を表し、2 番目の項はいわゆる拡散率。このため、一般的なケースでも拡散という用語を使用します。

定義した速度 c_i は演算子 $\hat{c}_i$ を使って決定できます。

$$\hat{c}_i = a_i - \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} b_{ik}. \quad (12)$$

正式には以下の方法で得られます：

$$c_i = \frac{1}{w} \hat{c}_i w; \quad \hat{c}_i w = c_i w. \quad (13)$$

簡単にわかるように、演算子 y_l と c_i の乗算は可換ではありませんが、交換関係

$$y_l \hat{c}_i - \hat{c}_i y_l = b_{il} \quad (14)$$

を満たします。それは本当です。

$$\begin{aligned} (y_l \hat{c}_i - \hat{c}_i y_l) w &= y_l a_i w - y_l \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) - a_i y_l w + \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} y_l w) \\ &= w \sum_k b_{ik} \frac{\partial y_l}{\partial y_k} = b_{il} w. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで得られた交換関係と量子力学における同様の関係との関係については、後ほど詳しく説明します。

不確実性関係を導くには、以下の平均値の説明が必要です。

$$\left. \begin{aligned} \overline{y_l} &= \int y_l w d\mathbf{y}, \quad \overline{\hat{c}_i} = \overline{c_i} = \int \hat{c}_i w d\mathbf{y}, \\ \overline{y_l^2} &= \int y_l^2 w d\mathbf{y}, \quad \overline{\hat{c}_i^2} = \int \frac{1}{w} (\hat{c}_i w)^2 d\mathbf{y}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

散布図 (二乗平均誤差) は

$$\left. \begin{aligned} (\Delta y_l)^2 &= \overline{(y_l - \overline{y_l})^2} = \int (y_l - \overline{y_l})^2 w d\mathbf{y}, \\ (\Delta c_i)^2 &= \overline{(c_i - \overline{c_i})^2} = \int \frac{1}{w} [(c_i - \overline{c_i}) w]^2 d\mathbf{y}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

シュワルツの不等式を関数

$$\frac{1}{\sqrt{w}} (y_l - \overline{y_l}) w; \quad \frac{1}{\sqrt{w}} (c_i - \overline{c_i}) w,$$

に適用すると私たちは

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{w} [(y_l - \bar{y}_l)w]^2 d\mathbf{y} \cdot \int \frac{1}{w} [(c_i - \bar{c}_i)w]^2 d\mathbf{y} \\ & \geq \left| \int (y_l - \bar{y}_l)(c_i - \bar{c}_i)w d\mathbf{y} \right|. \end{aligned}$$

次式を得ます。左側の要素は散布図です。したがって、右辺を簡略化すると、

$$\Delta y_l \Delta c_i \geq \left| \overline{y_l \hat{c}_i} - \bar{y}_l \bar{\hat{c}_i} \right|. \quad (17)$$

右辺の式を評価するために、同一の変換を実行します。

$$y_l \hat{c}_i = \frac{y_l \hat{c}_i + \hat{c}_i y_l}{2} + \frac{y_l \hat{c}_i - \hat{c}_i y_l}{2}.$$

(14) によればここに当てはまる

$$\frac{y_l \hat{c}_i - \hat{c}_i y_l}{2} = \frac{b_{il}}{2}.$$

これにより、不確定性関係は次の式で表されます。

$$\Delta y_l \Delta c_i \geq \left| \frac{\overline{y_l \hat{c}_i} + \overline{\hat{c}_i y_l}}{2} - \bar{y}_l \cdot \bar{\hat{c}_i} + \frac{\bar{b}_{il}}{2} \right|. \quad (18)$$

式 (17) は、積分限界で w がゼロになる場合には特に単純になります。

$$\overline{y_l \hat{c}_i} = \overline{y_l a_i} - \sum_k \int y_l \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) d\mathbf{y}$$

が成り立つ場合、 $l \neq k$ が成り立つ各項の積分は右側の合計で消えます。それは

$$\int y_l \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w) d\mathbf{y} = 0,$$

です。 b_{ik} が無限大にならず、 w が境界で消滅する場合；残りの項 $l = k$ から部分積分により

$$\int y_l \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{il} w) d\mathbf{y} = -\bar{b}_{il},$$

を得ます。これらすべてを考慮すると、私たちは

$$\overline{y_l \hat{c}_i} = \overline{y_l a_i} + \bar{b}_{il},$$

それで

$$\Delta y_l \Delta c_i \geq \left| \overline{y_l a_i} - \bar{y}_l \bar{a_i} + \bar{b}_{il} \right|. \quad (19)$$

右側を見ると、より大まかな近似値が得られます。 $\overline{b_{il}}$ の横に現れる項は無視します：

$$\Delta y_l \Delta c_i \geq \overline{b_{il}} > 0, \quad (b_{il} \neq 0) \quad (20)$$

もちろん、(20) では一般にもっと大きな記号があり、等式は特別な w に対してのみ成り立ちます。フルトよれば、外部力場のない 1 次元ブラウン運動の場合、関係式は

$$\Delta y \Delta c \geq D. \quad (21)$$

このことから、ブラウン運動粒子に対するフルトの関係式は (20) の特別な場合であることが分かります。同時に、(19) をフルトの問題に適用すると、(21) をより明確にすることも分かります。(19) と量子力学的な不確定性関係 [10] との関係については後ほど詳しく説明します。

y_i と y_l は可換ですが、速度演算子 $\hat{c}_i$ と $\hat{c}_l$ の乗算は可換ではないことがすぐにわかります。

$$\hat{c}_i \hat{c}_l - \hat{c}_l \hat{c}_i \neq 0.$$

どうやら、次のような不確定性関係も存在するようです。

$$\Delta y_i \Delta y_i \geq |\overline{y_l y_i} - \overline{y_l} \overline{y_i}|,$$

$$\Delta c_i \Delta c_i \geq |\overline{\hat{c}_l \hat{c}_i} - \overline{\hat{c}_l} \overline{\hat{c}_i}|.$$

速度は互換性がないため、不確定性の度合い (右側の項) は一般に、座標の場合よりも速度の場合の方が大きくなります。

4

以下では、速度 a_i がポテンシャルを持つ特殊なケースを扱います。

$$a_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{s}{m} \right). \quad (22)$$

(表記を簡単にするために、速度ポテンシャルを s/m で表します。 m は問題の粒子の質量です。) ポテンシャル s の存在に加えて、 $i = k$ に対して $b_{ik} = b = \text{const}$ であるが、 $i \neq k$ に対しては $b_{ik} = 0$ であると仮定します。(すでに見たように、これは拡散の場合にも当てはまります。) この場合、「拡散流」にもポテンシャルがあることは容易にわかります。つまり、微分方程式

$$-\frac{b}{w} \frac{\partial w}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\sigma}{m} \right) \quad (23)$$

は常に

$$w = \alpha^2 e^{-\frac{\sigma}{mb}} \quad (\alpha^2 = \text{const} > 0) \quad (24)$$

を満足します。したがって、

$$c_i = a_i - \frac{b}{w} \frac{\partial w}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{s + \sigma}{m} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\Sigma}{m} \right), \quad (25)$$

Σ/m は全速度 c_i のポテンシャルであり、ここで

$$\Sigma = s + \sigma \quad (26)$$

です。

よく知られているように、移動する点系に属するハミルトン主関数は、配置空間内の非定常面を運動に割り当てます。連続体の力学では、主な関数は速度 (または運動量) ポテンシャルに対応します。連続体の運動は、速度 (運動量) ポテンシャルによって特徴付けられる配置空間の不安定な (移動する) 表面によって特徴付けられることもできます。どちらの場合も、言及されている表面は波面とみなすことができます。ここで言う波は平面波です。しかし、統計問題ではポテンシャル Σ も密度 w に依存するため、ここで発生する配置空間の波はもはや平面波ではありません。確率振幅関数を次の仕様で定義します:

$$\Psi = \alpha e^{-\frac{i}{2mb}\Sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2mb}\sigma}. \quad (27)$$

すぐにわかるのは

$$\Psi^*\Psi = \alpha^2 e^{-\frac{1}{mb}\sigma} = w. \quad (28)$$

が成り立ちます (ここで Ψ^* は Ψ の複素共役です)。(22) と (24) を考慮して、式の代わりに以下を使用しました。(10) において実数 w または s は複素関数 Ψ です。フォッカー方程式は次のようになります。

$$\frac{\partial \Psi^*\Psi}{\partial t} + \frac{b}{\sqrt{-1}} \text{div}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = 0. \quad (29)$$

ここで、 $\text{div} = \sum \frac{\partial}{\partial y_i}$ であり、 ∇ は成分 $\frac{\partial}{\partial y_i}$ を持つベクトルを表します。先ほど述べたように、式 (29) は Ψ に対して与えられたフォッカーの式に他なりません。(もちろん、これは Ψ が存在する場合にのみ当てはまり、したがって s と σ も存在します。) さらに、 Ψ は波動力学におけるものと同じ意味を持つので、(29) は波動力学の連続方程式と一致することは明らかです。波動力学では、

$$b = \frac{\hbar}{2m}. \quad (30)$$

(27) と (28) を挿入することによって (29) から元のフォッカー方程式が現れるという事実を考慮すると、**フォッカー方程式が量子力学でも有効である**ことは明らかです。つまり、シュレーディンガーの反論 [3] は、フォッカー方程式がシュレーディンガーの方程式と同一ではないと述べているだけであり、これは決して2つの理論の違いを意味するものではありません。フォッカー方程式は Ψ には適用されませんが、 $\Psi^*\Psi = w$ には適用されます。方程式から (29) は上記の主張の逆、すなわち $b = D$ と設定すれば波動力学の連続方程式は拡散に対しても有効であることを意味します。これから方程式です。(7) と (29) は波動力学と M 過程の両方で有効です (明らかに Ψ の存在に必要な制限を考慮すると)、同じ過程が

w は不可逆であり、
 Ψ は可逆な性質です。

確率振幅関数の導入には、 Ψ 関数を使用して平均を計算できる必要があります。作業は簡単で、式 (11) を (27) の c_i に代入するだけである (式 (22) と (23) を考慮) または (29) から得られる式

$$j_i = \frac{b}{\sqrt{-1}} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial y_i} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right)$$

$w = \Psi^* \Psi$ で割る必要があります。つまり、

$$c_i = \frac{j_i}{\Psi^* \Psi} = \frac{b}{\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{\Psi^*} \frac{\partial \Psi^*}{\partial y_i} - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right).$$

Ψ に関連する扱いやすい演算子を c_i に割り当てることはできませんので、速度の元の定義を少し修正し、次のように平均速度 c_i から Ψ に関連する速度を導くのが適切であると思われます。

$$\begin{aligned} \bar{c}_i &= \frac{b}{\sqrt{-1}} \int \left\{ \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial y_i} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right\} d\mathbf{y} \\ \bar{c}_i &= -\frac{2b}{\sqrt{-1}} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} d\mathbf{y} = \int \Psi^* \hat{c}'_i \Psi d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

これから速度演算子の修正定義が得られる。

$$\hat{c}'_i = -\frac{2b}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (31)$$

そして c_i に対応する確率速度の形

$$c'_i = -\frac{1}{w} \frac{2b}{\sqrt{-1}} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\Sigma}{m} \right) - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\sigma}{m} \right). \quad (32)$$

このようにして得られた複素速度は、波動力学的速度と完全に一致します。

一般に、ランダム振幅関数を割り当てることができるすべての M 過程では、波動力学的速度の定義も意味を持ちます。したがって、量子力学の数学的道具全体を文字通りこのような M 過程の理論に転用することができます。

(32) と (25) を比較すると、 c'_i の実部が c_i に等しいことは明らかです。(32) の虚数部の役割は純粹に形式的なものです。 w に関連する平均は (簡単にわかるように) 常にゼロになります。特定の場合で 1 つの定義を使用するか、両方の定義を使用するかは、平均化に 2 つの量 w と Ψ のどちらが使用されるかによってのみ決まります。

拡散の場合を波力学の場合 ($b = D$ または $b = \frac{\hbar}{4\pi m}$) と比較し、これをフェルミの関係式 (21) と比較すると、ハイゼンベルグの関係式

$$\Delta y \cdot \Delta c \geq \frac{\hbar}{4\pi m} \quad (33)$$

が得られます。

このことから、ハイゼンベルク関係式が (20) 式や (21) 式の特別な場合であると結論付けることはできません。(20) と (21) で発生する速度は波動力学的速度と同一ではありません。速度のさまざまな形式に関するこれまでの説明から、**M 過程における不確定性関係は、速度の波動力学の定義に関してもその有効性を保持していることが直接的にわかります。**式 (20) と時間の力学に対応する 2 つの形式は、速度の正式な定義のみが異なります。速度の 2 つの定義は内容が同一であり、両方の理論で同等に有効であるため、**どちらかの定義を採用することは根本的な決定ではなく、単に用語の問題です。**波動力学における速度の定義自体は、波動力学における速度 c_i に置き換えることができることがわかります。もちろん、波動力学の方程式は異なる形をとりますが、その物理的内容はまったく変わりません。

これまで述べてきたことから、**波力学的過程は特殊な M 過程であり、波力学的不確定性関係と交換可能性関係はまさにこの文脈から導かれることがわかります。**また、第 3 節の可換関係は偶然の形式的類推ではなく、置換方程式 (27)、(31)、(32) によって波動力学的形式に直接変換できることも分かります。容易に分かるように、この変換は逆方向にも実行できるため、第 3 節の交換可能性と不確定性の関係は、対応する波動力学的关系を任意の M 過程に一般化したものを表します。

最後に、我々の発言はシュレーディンガー [10] に由来する波動力学的不確定性関係の最も一般的な形に言及していることを指摘しておきます。

5

これまでの研究結果をまとめると、波動力学のどの特性が実際に フォッカー方程式から導かれるのかという問題について議論したいと思います。

a) フォッカー方程式の存在は、確率密度 w と波動関数 Ψ の同時存在をもたらします。2 つの関数の関係は次のようになります。

$$w = \Psi^* \Psi.$$

これは、波動力学の統計的解釈が正当であるというボルンの仮説の新たな確認を提供します。ボルン仮説では、 Ψ は波動関数であるだけでなく、ランダム振幅関数でもあると述べられていますが、私たちの説明では、逆に、密度関数 w (特定のタイプの M 過程の場合) の存在は、関数 Ψ の存在も意味することを示しています。もちろん、そのような状況下でも、統計的解釈が波動力学の唯一の正当な解釈であると主張することはできませんが、私たちの研究結果はこの見解の正しさの可能性を高めています。

b) 量子力学演算子計算、交換可能性、不確定性関係は、すでに述べたように、フォッカー方程式から導出できます。このことは特に指摘されなければなりません。なぜなら、前述の (l. c.) 見解によれば、波動力学と古典物理学の本質的な違いを形式的に表現するのはまさに波動力学速度の複雑な性質だからです。しかし、これまで見てきたように、波動力学のこの特性 (およびその他の特性) は、特別な物理的特性から生じるものではなく、統計的観点からのみ生じるものです。

c) 最後に、フォッカー方程式の重要な (まだ議論されていない) 結果について言及したいと思います。

量子力学の統計的道具の全体はフォッカー方程式から導き出すことができ、隠れたパラメータの不可能性を証明するフォン・ノイマンの考察は、この統計装置のみに基づいているため、このタイプの考察から得られる結論もすべてフォッカー方程式に帰せられます。フォッカーの方程式から、フォン・ノイマンの意味での隠れたパラメータはどの M 過程でも発生しないことがわかります。

私たちの議論から、このようにして得られたつながりは量子論の認識論的な困難 (例えば因果関係の問題) を排除するものではなく、逆に M 過程をこれらの矛盾した問題の領域に引き込むことになるようです。これによれば、波動力学だけでなくすべての M 過程も非因果的であるため、因果律はいかなる形でも適用できないこととなります。しかし、そうではありません。形式的な理由から、フォン・ノイマンの証明は拡散、つまり隠れたパラメータが明らかに存在する場合にも有効でなければなりません。この事実、フォン・ノイマンの議論では何らかの重要な要素が考慮されていないことを示しています。 b を定数値 $\frac{h}{4\pi m}$ または D から開始することは、おそらく何の意味もありません。これらの考え方に基づくと、ある意味では量子力学と拡散理論の両方において「隠れたパラメータ」、つまり因果過程について語ることができることは明らかです。もちろん、まだ「フォン・ノイマンの隠れたパラメータの定義には実際にどのような制限が含まれているのか?」という疑問には答えていません。以下ではこの質問にもお答えします。

6

波動力学的過程が特殊な M 過程であるという私たちの主張は、 $\Psi^*\Psi = w$ が電子のランダム分布の密度関数であるという「ボルン仮説」の正しさを前提としている場合にのみ有効です。しかし、この仮説と同時に、確率の概念から生じるすべての要件も考慮する必要があります。確率の概念は、確率論のすべての要件に対応する明確な意味でのみ使用できます。世界力学における要件が 1 つでも満たされていないことを否定すると、ボルン仮説も否定されます。これらはすべて自明ですが、最近、相容れない特性を持つ 2 種類の確率概念が存在するという、ある種の相反する傾向が生まれつつあるため、特に言及する必要があると思います。

私たちの最後の発見は、直接的な文脈におけるハイゼンベルク関係式の「基本的な測定不可能性」です。考察をさらに進めていくと、不確定性関係 (この関係がどのような形式であっても) は測定とは何の関係もなく、統計的観点からのみ無関係に導かれます。つまり、ハイゼンベルクの関係の存在は、位置と速度 (または運動量) の同時かつ任意の精度の測定を決して排除しないという結論に必然的にたどり着くでしょう。また、電子の位置が決まると Ψ 関数が一点に縮小するという広く信じられている考えは誤りであり、確率の概念と矛盾していることも示したいと思います。これらについては、以下で詳しく説明します。私たちの主張は、確率は個々の測定によって提供される情報とは何の関係もないという事実に基づいています。大数の法則によれば、確率は無限の測定から生じる相対頻度の限界にのみ依存しますが、この限界は 1 つの (または有限の数の) 個々の測定の値によって影響を受けません。確率と観測の関係は、次の簡単な例で明らかになります。コインで遊ぶとき (「表裏」)、確率 $\frac{1}{2}$ は実際の観測値とは無関係です。裏が出るか表が出るかによって、表が出る確率が 1 から 0 に急激に変化したり、その逆になったりすることはありません。この確率の値は常に $\frac{1}{2}$ であり、この確率値は、測定によって得られた相対頻度の限界が大数の法則に従って何らかの形

で $\frac{1}{2}$ に収束する限りにおいてのみ、個々の測定に関連付けられます。

同じことが電子の位置や量子状態の観察にも当てはまります。 w が実際にランダムな密度関数を意味する場合、電子の位置を観測しても w と Ψ がそれぞれ 1 つの点に縮小されることはありません。もちろん、観測の特異情報は確率論的結論に使用できないと主張するつもりはありません。この情報はフォッカー方程式では使用できず、別の確率論的系では使用できると主張しているだけです。その他の確率論的系は、この場合、コルモゴロフ方程式によって与えられます。そこで発生する遷移密度関数 $v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t)$ により、時間 s における電子の位置 $\mathbf{x}$ を使用して、時間 t における位置 $\mathbf{y}$ の $d\mathbf{y}$ 環境への電子の到達確率 $v(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t)d\mathbf{y}$ を決定できるようになります。しかし、この可能性は量子力学ではまだ活用されていません。

ハイゼンベルク関係 (そして実際すべての統計的不確定性関係) を正しく解釈するためには、統計的議論に現れる速度のどれもが問題の系の実際の速度に対応していないということも考慮する必要があります。明らかに、 a_i も $-\frac{1}{w} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} (b_{ik} w)$ も c_i と c_i も、対応する期待値 (関数 w または Ψ に対応する平均値) も、系の実際の速度 ξ_i に沿って同一視することはできません。系の運動を決定論的に記述する場合は、 $d\xi_i/dt$ を使用します。この役割は、問題の統計的处理では c_i または c'_i によって引き継がれます。このことから、不確定性関係の存在は問題の特定の物理的性質とは無関係であり、統計的处理からのみ生じることが推論され、したがって、存在の数学的条件のみが物理的に実現される場合にのみ有効となります。不確定性関係は、座標 ξ_i または速度の期待値が、検討中の系の実際の座標または実際の速度 $d\xi_i/dt$ に対応しないため、測定が根本的に不可能であることを意味するものではありません。これらの事実は、(すでに何度も言及されているように) 個々の測定の結果は確率データとは何の関係もないという観点からのみ検討する必要があります。また、拡散過程の不確定性関係とハイゼンベルク関係の間には違いがないことも言及しておくべきである。もしそのような関係が正確な測定の根本的な不可能を意味するのであれば、ブラウン運動粒子の位置と速度をいかなる精度でも同時に測定することはできませんが、明らかにそうではありません。(ここでは、正確な測定の基本的な可能性を念頭に置いています。) ハイゼンベルクの関係を実証するためのさまざまな思考実験でさえ、不確定性が相互作用の結果であることを証明していません。波の特性を考慮して、相互作用の一方のパートナーを事前に統計的に特徴付けるため、もう一方のパートナーに対する相互作用の結果は一貫して統計的にのみ考慮することができます。これが、ハイゼンベルク関係が他のパートナーにも発生する理由であり、これは本質的に相互作用からではなく、最初のパートナーの状態の統計的 (因果律の観点からは不正確) 特性から生じます。

先ほど述べたことから、2 つの点が強調されるはずですが。

a) ブラウンの運動の場合、フォン・ノイマンの意味での隠れたパラメータは存在できませんが、現実には隠れたパラメータが存在することが分かっています。

b) M 過程に関連する不確定性関係 (ハイゼンベルク関係を含む) は統計的表現の排他的結果であり、したがって測定によって引き起こされる擾乱とは無関係です。

これらの発見により新たな問題が生じます。これらの問題を解決する方法はまだ見つかっていないため、次の質問をさらに詳しく検討する必要があります。議論されている問題の観点から、M 過程の物理学と波動力学の間には、見つかった類似点以外にどのような違いが存在する可能性があるでしょうか? あるいは、

より具体的には、ブラウン粒子の運動の確率法則と波動力学的粒子の質量中心の運動の波動力学法則との間にはどの程度の違いがあるのでしょうか？ これまで見てきたように、確率論的な観点からは2つの理論にまったく違いがないため、形式的な観点からは違いは見当たりません。しかし、波動力学のすべての特性が統計的処理から生じることをさらに証明したいのであれば、さらなる疑問を提起し、それに答えなければなりません。これらの質問は次のとおりです。量子力学を特殊な M 過程の物理学として考慮できるようにするには、電子にどのような具体的なモデルを割り当てる必要があるのでしょうか？ モデルの問題に関連して、隠れたパラメータと因果的背景の問題も生じます。シュレーディンガー [4] の反論に関連して、まずギブスの統計力学の適用限界を検討する必要があります。これらすべての質問に肯定的に答えることができたとしても、確率過程の法則からシュレーディンガー方程式を導出することがまだ先にあることを忘れてはなりません。フォッカー方程式が波動力学でも有効であることを証明するだけでは不十分です。なぜなら、 Ψ 関数を導入しても、フォッカー方程式からシュレーディンガー方程式にはまだ到達していないからです。どうやら、実数フォッカー方程式は複素数シュレーディンガー方程式の一部のみを表しているようです。

7

フォッカー方程式の場合の電子に対応する具体的なモデルは何でしょうか？ 正式には、電子は拡散係数 $\frac{h}{4\pi m}$ の平均に埋め込まれていると言えます [11]。しかし、そのような治療法は証明できません。また、拡散と文字通り類似して、各電子をサブ電子からなるガスとして考えることもできます。すると、 $\Psi^*\Psi = w$ はサブ電子の密度分布、または単一電子のランダム密度関数になります。この見解は、電子が一点（または小さな空間粒子）に局在する可能性と矛盾するため、支持できません。私たちの意見では、唯一受け入れられる説明は次の解釈によって与えられます。分子数 N の拡散系の場合、フォッカー方程式は系の単一分子の起こり得る挙動を記述する関係として考えることができます。ただし、同じ問題では別の解釈も可能であり、それによれば、多数の自由度を持つ系があるものの、少数の自由度に属するパラメータの動作のみを考慮に入れることになります。通常の拡散の場合、考慮される自由度に対して単一粒子の自由度が発生します。ただし、フォッカー方程式の妥当性は、区別された自由度が特定の個別の物質的支持を持つかどうかによって影響を受けません。したがって、フォッカー方程式は一般に次のような関係式で表すことができます。これは、多くの自由度を持つ構造のいくつかのパラメータの可能性のある動作を記述します。したがって、電子も多数の自由度を持つ構造として考えます。現在の知識は質量中心の座標の存在のみに言及しているため、電子を近似的に質点として考える必要があります、他のパラメータの役割は統計的にしか考慮できません。フォッカー方程式は、構造に関する正確な知識がなくても、そのような構造が存在すると仮定するだけで、問題のパラメータのランダム密度関数の方程式を計算することを可能にします [参照, 式 (7)] は直接書き表すことができます。もちろん、内部構造に関する知識が不足しているため、散乱テンソル b_{ik} に関しては直接的な経験にのみ依存します。通常の拡散と同様に、これは波動力学でも同様です。現在の知識によれば、分子データのみから拡散係数を計算することは不可能です。波動力学でも、電子の構造についてはあまり知られていないため、同様の状況が見られます。しかし、経験上、波

動力学はそのような M 過程の物理学であり、

$$i = k \text{ に対して } b_{ik} = \frac{h}{4\pi m};$$

$$i \neq k \text{ に対して } b_{ik} = 0$$

が適用されます。もちろん、波動力学では、 $\frac{h}{4\pi m}$ に関連する拡散運動は分子の拡散とはまったく異なります。2つの問題の間には、単一の電子がブラウン粒子に対応するのではなく、拡散系全体に対応するという点でのみ類似点が存在します。単一の電子は、 N 個の粒子からなる拡散系と同じ数の自由度を持つ系を表します。2つのケースの本質的な違いは、波動力学的粒子は拡散粒子系のように空間内で「崩壊」しないという点です。しかし、2つの問題の特徴付けるフォッカー方程式の形式に関する限り、これは重要ではありません。フォッカー方程式は、ランダム変数として使用されるパラメータと、明示的に考慮されていない他のパラメータとの間に相互作用があることを単純に表現します。通常の動物の拡散では、直接の原因は分子の衝突です; 電子の場合、質量中心の運動と構造の「運動」が互いに及ぼす影響は同様の役割を果たします。

8

「隠れたパラメータ」の問題の解決は、一見して考えるよりかはるかに複雑です。科学が発展して電子の構造についての洞察が得られると仮定した場合、電子の振る舞いを因果的に説明できるようになると期待できるかどうかという疑問に対して、私たちはフォン・ノイマンの定理に基づいて決定的な答えを出さなければなりませんでした。しかし実際には、フォン・ノイマンの「隠れたパラメータ」の定義には非常に重要な制限が含まれています。つまり、フォン・ノイマンの定義に対応する隠れたパラメータは、量子力学では実際には存在できないのです。これは、拡散や、隠れたパラメータの存在が明らかになるその他のケースにも当てはまります。もちろん、フォン・ノイマンの証明はそれ自体正しいので、フォン・ノイマンの証明以外にも隠れたパラメータを定義する方法がある可能性を認めなければなりません。フォン・ノイマン自身は、隠れたパラメータについて次のように述べています。「古典力学の例を使用して、 Ψ と物理量の値との間の関係の非因果的性質を説明したい場合、次の解釈が明らかに与えられます。実際には、 Ψ は状態を正確に決定するわけではありません。状態を完全に知るためには、さらなる数値情報が必要です。これは、系には Ψ 以外にも他の決定要素、他の座標があることを意味します。これらすべてを知っていれば、 Ψ のみの助けを借りて、すべての物理量の値を正確かつ明確に指定できますが、古典力学で $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$ の一部に基づいているのと同様に、統計的な記述のみが可能です。この見解は、もちろん仮説に過ぎず、その価値は、 Ψ に追加される追加の座標を実際に見つけ、それらを使用して経験と一致し、 Ψ (および他の座標の平均) のみを与えられた場合に、再び量子力学の統計的記述を生み出す因果理論を構築できるかどうかによって決まる理論です。

これらの仮想的な追加座標は、通常「隠れた座標」または「隠れたパラメータ」と呼ばれます。これは、以前の研究で唯一発見された Ψ と並んで、むしろ隠れた役割を果たさなければならなかったためです ([7], pp. 108–109)。

元のテキストでは、波動関数はどこでも φ で表されますが、表記法との一貫性を保つために、代わりに Ψ と書きます。

上記の見解によれば、隠しパラメータは Ψ への追加情報であり、 Ψ と組み合わせることで問題の問題の因果関係の説明が提供されることになります。このような隠れたパラメータの定義は矛盾しており、このような隠れたパラメータは量子力学でも発生しないことはすぐに明らかです。 Ψ は統計的な観点から系を特徴付けるため、いかなる状況でも因果状態変数として考えることはできません。そのような状況が発生した場合、前の問題を逆にして、因果関係の説明を提供する状態方程式から、余分なパラメータを排除することによって統計方程式を取得することになりますが、これは明らかに不可能です。フォン・ノイマンの証明は、正しく解釈されれば、統計的状态変数が因果的状态変数として同時に現れることはできないということを単純に述べています。

隠れたパラメータの概念がどのような意味で解釈できるか、またどのように解釈しなければならないかは、拡散の例によって示されます。しかし、確率論の観点から見た拡散の統計的特徴は波動力学のそれと一致するため、量子力学の隠れたパラメータの存在は拡散理論の隠れたパラメータの存在と一致しなければなりません、つまり、どちらの場合でもその存在はあり得ないか、両方の場合でもその存在が有効であると言えます。これですでに疑問は解決しました：量子力学では隠れたパラメータも存在する可能性があるのです。ただし、隠れたパラメータを見つけて因果関係やより正確な統計法則を決定するのは別の作業です。これは、電子の構造に関する具体的な考えに基づいてのみ解決できます。

以下では、量子力学の範囲を超えた一般性で、隠れたパラメータのフォン・ノイマン定義を扱います。ランダム振幅関数を M 過程に割り当てることができるかどうかに関わらず、次の問題に遭遇する：フォッカーの式 (7) に現れるランダム量 $y_1, y_2, \dots, y_n$ の系は、散乱テンソルが N 次元空間で理想的に消滅するような方法で、さらにパラメータ $y_{n+1}, \dots, y_N$ を追加することによって補足できるでしょうか？ (ただし、これは、厳密な因果関係の説明がより深くなるように統計法則を洗練させるために必要となるでしょう。) 遷移確率の密度関数は新しい系では

$$V(y_1, y_2, \dots, y_N; z_1, z_2, \dots, z_N, t + \Delta).$$

私たちは、表記

$$d\mathbf{z} = dz_1 dz_2 \dots dz_n, \quad d\bar{\mathbf{z}} = dz_{n+1} \dots dz_N,$$

$$d\mathbf{z} d\bar{\mathbf{z}} = dz_1 dz_2 \dots dz_n \dots dz_N.$$

を使用します。これらの仮定の下では、新しい散乱テンソルは

$$\beta_{ik} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int (z_i - y_i)(z_k - y_k) V d\mathbf{z} d\bar{\mathbf{z}} \quad (34)$$

です。これらの仮定の下では、新しい散乱テンソルは明らかに、変数 $z_{n+1}, \dots, z_N$ について積分して、 V から v を取得する必要があります：

$$v(\mathbf{y}, t; \mathbf{z}, t + \Delta) = \int V d\bar{\mathbf{z}}. \quad (35)$$

この関係に基づいて、まず $i, k \leq n$ が成り立つものを計算します。すると (34) 式では $\mathbf{z}$ による積分を別途実行することができ、(35) 式によれば v だけが得られるが、残りの積分は元の β_{ik} と同じです。

$$\beta_{ik} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int (z_i - y_i)(z_k - y_k) v d\mathbf{z} = b_{ik},$$

$$i, k \leq n.$$

したがって、新しく導入された β_{ik} は古い b_{ik} と同一であり、 $b_{ik} \neq 0$ の場合は $\beta_{ik} \neq 0$ も成立します。

したがって、不確定性関係を排除するためのこの必要条件さえ満たされていないことがわかります。これは、ランダム変数の系を補足して、問題を因果的に記述できるパラメータ系を形成することはできないことを意味します。

9

シュレーディンガーの反論 [4] についてはすでに述べましたが、それによれば彼は質的力学の直接的な統計的構成は可能ではないと考えています。この問題をより詳細に議論するためには、M 過程の理論で発生するランダム密度関数 $w(x, s)$ との関係を保つ必要があります；一方には座標空間の密度関数 $v(x, s; y, t)$ があり、他方には統計力学で生じる位相空間の密度関数 $f(u, x, s)$ (u : 速度) があります。両方の理論を使用して同じ量の期待値を生成し、2つの式 (互いに等しくなければならない) を互いに等しく設定すると、この質問に簡単に答えることができます。

M 過程の場合のマクロな流れ密度は

$$a(x, s) = \frac{1}{\Delta} \int (y - x) v(x, s; y, t) dy + \frac{o(\Delta)}{\Delta}, \quad (36)$$

統計力学では

$$a(x, s) = \frac{1}{w(x, s)} \int u f(u, x, s) du. \quad (37)$$

方程式の右辺の積分は積分領域全体を参照しているので、積分が領域全体に及ぶ場合にのみ、(36) と (37) の右辺の等式を記述することができます。しかし、私たちは

$$u = \frac{y - x}{\Delta} + \frac{o(\Delta)}{\Delta}, \quad y - x = u\Delta + o(\Delta) \quad (38)$$

を適用します。したがって、 x と s が固定されている場合、 y は u によって一意に決定され、その逆も同様です；(37) の積分を区間 (u_1, u_2) に拡張すると、(36) の対応する積分領域 (y_1, y_2) が得られます。

$$y_i = x + u_i \Delta + o(\Delta), \quad i = 1, 2.$$

一方、積分関数は原始関数を持つことがわかっているので、(36) と (37) の右辺の恒等式は、2つの積分のみが対応する領域に拡張されている限り、任意の積分領域に対して有効です。

$$\frac{1}{\Delta} \int_{y_1}^{y_2} (y - x) v(x, s; y, t) dy + \frac{o(\Delta)}{\Delta} \equiv \frac{1}{w(x, s)} \int_{u_1}^{u_2} u f(u, x, s) du.$$

これから、(38) を考慮すると、領域 $(y, y + dy)$

$$v(x, s; y, t)dy = \frac{1}{w(x, s)}f(u, x, s)du + o(\Delta). \quad (39)$$

この式があらゆる場合に当てはまると主張することはできません。しかし、 v と f が同時に存在するためには式 (39) を満たすことが必要です。

ここで、(39) を考慮してモーメント A と B を決定します：

$$A(x, s, \Delta) = \int (y - x)v dy = \frac{\Delta}{w} \int u f(u, x, s) du + o(\Delta), \quad (40)$$

$$B(x, s, \Delta) = \int (y - x)^2 v dy = \frac{\Delta^2}{w} \int u^2 f(u, x, s) du + o(\Delta). \quad (41)$$

どちらの表現でも、 f を含む積分は具体的な統計力学的解釈を持ち、両方の積分は有限 (またはゼロに等しい) です。つまり、散乱は

$$b = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{B}{2\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{2w(x, s)} \int u^2 f(u, x, s) du + \frac{o(\Delta)}{\Delta} \right). \quad (42)$$

いずれの場合もゼロに等しい：

$$b \equiv 0.$$

ご覧のとおり、これは f の存在を仮定した結果です。したがって、統計力学で使用する位相関数 $f(u, x, s)$ は、散乱がゼロの場合にのみ存在し、統計力学の扱いは、このような M 過程に対してのみ有効であると結論付けることができます。どうやら、我々の考察は n 次元の場合にも応用でき、統計力学の適用性の基準として

$$b_{ik} \equiv 0 \quad (43)$$

を受け取ります。

統計的性質を持つと思われる特定の物理法則が統計力学の枠組みに当てはまらないという事実は、統計的解釈が不可能であることを証明するものではありません。波動力学では $b_{ii} = \frac{\hbar}{4\pi m}$ なので、関数 f は実際には存在できないため、別の統計的道具を使用する必要があります。最後に、 $b_{ik} \equiv 0$ の場合には拡散は起こらないが、 $b_{ik} = D \neq 0$ の場合には f は存在できないため、統計力学のみに基づいた拡散係数の計算は不可能になることに注意してください。上記の証明の基本的な考え方は、ゲベレイン (Gebelein) のコメント ([12], pp.541–542) から引用しました。

10

フォッカー方程式の形式 (29) がシュレーディンガー方程式とまだ同一ではないという事実は、シュレーディンガー方程式の統計的導出を必要とします。前の節の結果からわかるように、この目的には統計力学を使用することはできませんが、より広い範囲の統計的道具に頼る必要があります。これまでの調査では、一方で

は、これが第2節で学習した道具にすぎないことが示されていますが、他方では、これも不十分であることが証明されています。統計物理学の現在のパフォーマンスは、例えば、運動方程式の存在を知らずに連続方程式だけを知っている場合の流体力学と同じくらい制限されています。連続体の物理学における連続方程式の統計的類似物は明らかにフォッカー方程式ですが、それ以外に統計物理学の「運動方程式」は実際には何も知りません。このような方程式を見つけることは確率的な問題ではなく、純粋に物理的な問題であるため、このような「運動方程式」に到達するのは比較的簡単であることがわかります。確率物理学の問題のラグランジュ関数は特別な仮定なしに記述することができ、これを古典物理学でよく知られている変分原理を適用することで、問題の解決策が得られます。変分原理のオイラー-ラグランジュ微分方程式には、フォッカー方程式だけでなく、これまで知られていなかった問題に関する統計的な運動方程式も含まれています。変分原理は ([13]、367–368 ページ) です：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (44)$$

ここで、ポテンシャルを持つ乱流 (ランダムフロー) に限定すると、ラグランジュ関数の式が得られます。

$$L = \int \left\{ w \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{w}{2m} (\Delta \Sigma)^2 + U + \Pi(w) \right\} d\mathbf{y}. \quad (45)$$

ここでの Σ の意味は既に分かっています。 U は系全体の位置エネルギーのエネルギー密度を意味し、一般に w に線形依存することはできません。 $\Sigma(w)$ は「圧力エネルギー」であり、与えられたケースでは「拡散圧力」に関連しています。

$$\Pi(w) = \frac{m}{2} w \left(\nabla \frac{\sigma}{m} \right)^2 = \frac{mb^2}{2} \frac{(\nabla w)^2}{w} \quad (46)$$

そしてさらに

$$w \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = w \frac{\partial s}{\partial t} - mb \frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\frac{w}{2m} (\Delta \Sigma)^2 = \frac{w}{2m} (\nabla s)^2 - b(\nabla s, \nabla w) + \frac{m}{2} b^2 \frac{(\nabla w)^2}{w}.$$

この後者の式を L の式に代入すると、

$$L = \int \left\{ w \frac{\partial s}{\partial t} - mb \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{2m} (\nabla s)^2 - b(\nabla s, \nabla w) + mb^2 \frac{(\nabla w)^2}{w} + U \right\} d\mathbf{y}.$$

w と s に関して (互いに独立して) 変分する必要があります。まず、 w に関する変分をとると、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int mb \frac{\partial w}{\partial t} d\mathbf{y} dt = 0,$$

$$-b\delta \int (\nabla s, \nabla w) d\mathbf{y} = b \int \Delta s \cdot \delta w \cdot d\mathbf{y},$$

$$mb^2 \delta \int \frac{(\nabla w)^2}{w} d\mathbf{y} = \int \left\{ -2mb^2 \frac{\Delta w}{w} + mb^2 \left(\frac{\nabla w}{w} \right)^2 \right\} dw \cdot d\mathbf{y}.$$

など。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla s)^2 + b \Delta s - 2mb^2 \frac{\Delta w}{w} + mb^2 \left(\frac{\nabla w}{w} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial w} \right\} ds \cdot dt \cdot d\mathbf{y}.$$

つまり変分法の性質を考慮すると

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla s)^2 + b \Delta s - 2mb^2 \frac{\Delta w}{w} + mb^2 \left(\frac{\nabla w}{w} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial w} = 0. \quad (47)$$

s に関する変化は

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int w \frac{\partial s}{\partial t} dt d\mathbf{y} &= - \int_{t_1}^{t_2} \int \frac{\partial w}{\partial t} \delta s dt d\mathbf{y}, \\ \frac{1}{2m} \delta \int w (\nabla s)^2 d\mathbf{y} &= - \int \left\{ \left(\nabla \frac{s}{m}, \nabla w \right) + w \Delta \frac{s}{m} \right\} \delta s \cdot d\mathbf{y}, \\ -b \delta \int (\nabla s, \nabla w) d\mathbf{y} &= b \int \Delta w \cdot \delta s \cdot d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

それで

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{m} (\nabla s, \nabla w) - w \Delta \frac{s}{m} + b \Delta w \right\} ds \cdot dt \cdot d\mathbf{y}.$$

あるいは変分原理を考慮すると

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left(\nabla \frac{s}{m}, \nabla w \right) - w \Delta \frac{s}{m} + b \Delta w = -\text{div} \left(w \nabla \frac{s}{m} \right). \quad (48)$$

s に関して変分させることにより、フォッカー方程式が得られます。これから Δs を表現し、得られた値を w についての変化によって得られた式 (47) に代入すると、次の形の確率密度の「運動方程式」が得られます。

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla s)^2 - b \left(\nabla s, \frac{\nabla w}{w} \right) + b^2 \left(\frac{\nabla w}{w} \right)^2 - mb^2 \frac{\Delta w}{w} + \frac{\partial U}{\partial w} = 0. \quad (49)$$

この方程式は、例えば拡散の場合 ($b = D$) に、フォッカー方程式とは別の関係を提供し、より多くのことを述べています。私の知る限り、この方程式はこれまでこの文脈では知られていませんでしたが、現在私たちは主に量子力学に興味を持っており、具体的には

$$b = \frac{h}{4\pi m}$$

が適用されます。2つのケース $b = D = \text{const}$ と $b = \frac{h}{4\pi m} = \text{const}$ は時間的に同一であるため、一緒に議論することができます。我々は(48)に Ψ を導入し、既知の方程式を得ます。

$$\frac{\partial \Psi^* \Psi}{\partial t} + \frac{b}{\sqrt{-1}} \text{div} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = 0.$$

Ψ で表される「運動方程式」(49)の形は

$$\Psi^* \Delta \Psi + \Psi \Delta \Psi^* - \frac{m}{b^2} \frac{\partial U}{\partial w} \Psi^* \Psi - \frac{\sqrt{-1}}{b} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = 0.$$

ここで

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

が設定されました。最後の2つの式を足し算または引き算すると、 Ψ の式と Ψ^* の式が得られます。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Psi - \frac{m}{b^2} \frac{\partial U}{\partial w} \Psi - \frac{\sqrt{-1}}{b} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= 0, \\ \Delta \Psi^* - \frac{m}{b^2} \frac{\partial U}{\partial w} \Psi^* - \frac{\sqrt{-1}}{b} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$b = \frac{h}{4\pi m}$ (50) の場合にはシュレーディンガー方程式と一致することがわかります。つまり、一体問題の場合、位置エネルギーのエネルギー密度は

$$U = w \cdot V$$

です。ここで、 V は外力力場から生じる位置エネルギーです。多体問題の場合、 $\partial U / \partial w$ は、相互作用から生じる位置エネルギーを既知の方法で提供します。多体問題の場合でも、私たちの考察は有効であることがわかります。

References

- [1] Pauli, W.: Handbuch der Physik, Bd. XXIV/1, S.83, 1933.
- [2] Fürth, R.: Z. Physik **81**, 143 (1933).
- [3] Schrödinger, E.: Berl. Ber. **1931**, 144.
- [4] Schrödinger, E.: Berl. Ber. **1930**, 400.
- [5] Bopp, F.: Z. Naturforschg. **2a**, 202 (1947).
- [6] Bass, J.: Rev. sci. **86**, 643 (1948).
- [7] Neumann, J.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer 1932.

- [8] Kolmogoroff, A. N.: Math. Ann. **104**, 415 (1931).
- [9] Kolmogoroff, A. N.: Math. Ann. **108**, 194 (1933).
- [10] Schrödinger, E.: Berl. Ber. **1930**, 296.
- [11] Féynes, J.: Acta Bolyaiana (Chluj-Kolozsvår, Rumänien) **1**, 5 (1946).
- [12] Gebelein, H.: Ann. Phys. **19**, 533 (1934).
- [13] Bloch, F.: Z. Physik **81**, 363 (1933).

ハンガリーのデブレツェン大学、理論物理学研究所。